「2006年度微分方程式概論」中間試験解答例

2006.6.16.　　10.40–12.10　　担当　井上　淳

$\boxed{\mathbf{1}}$ 関数 $u(\sqrt{x^2+y^2+z^2})$ で条件

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0,$$

$$u(r_0)=a, \quad u(r_1)=b, \quad (\text{但し } 0<r_0<r_1)$$

を満たすものを求めよ。

解答例 $\boxed{\mathbf{1}}$: $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ とおく。

$$\frac{\partial r}{\partial x}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\frac{x}{r},\ \frac{\partial^2 r}{\partial x^2}=\frac{r-x(x/r)}{r^2}=\frac{y^2+z^2}{r^3}$$

となるから、合成関数の偏微分をすることにより

$$\frac{\partial u(r)}{\partial x}=u'(r)\frac{x}{r},\ \frac{\partial^2 u(r)}{\partial x^2}=u''(r)\frac{x^2}{r^2}+u'(r)\frac{y^2+z^2}{r^3}$$

となる。他の変数 y,z に対しても同様だから、

$$u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}=u''(r)+\frac{2}{r}u'(r)=0$$

となる。ここで、$h(r)=u'(r)$ とおけば、上式は

$$h'(r)+\frac{2}{r}h(r)=0,$$

となり、これは変数分離形だから容易に解けて $h(r)r^2=c_1,\ u'(r)=\frac{c_1}{r^2}$ となる。これより、$u(r)=-\frac{c_1}{r}+c_2$ となるが、境界条件 $u(r_0)=a,\ u(r_1)=b$ を用いて、

$$u(r)=-\frac{r_0r_1}{r_0-r_1}(a-b)\frac{1}{r}+\frac{ar_0-br_1}{r_0-r_1}. \qquad \square$$

$\boxed{\mathbf{2}}$ $f\in C([a,b])$、$K\in C([a,b]\times[a,b])$ とする。このとき、u に対する積分方程式

$$u(x)=\int_a^x K(x,y)u(y)dy+f(x), \quad x\in[a,b] \tag{1}$$

は一意的な解 $u\in C([a,b])$ を持つことを示せ（ヒント：(1) の右辺を $(Tu)(x)$ とおくと、十分大きな自然数 m に対して T^m が縮小写像となる）。

解答例 $\boxed{\mathbf{2}}$: 関数空間 $C([a,b])$ に距離 $d(u,v)=\max_{x\in[a,b]}|u(x)-v(x))$ を入れると、これは完備な距離空間になることは知られている。

$$(Tu)(x)-(Tv)(x)=\int_a^x K(x,y)(u(y)-v(y))dy \tag{2}$$

となるから $M=\max_{x,y\in[a,b]}|K(x,y)|$ とおくと

$$|(Tu)(x)-(Tv)(x)|=|T(u-v)(x)|\le M|x-a|d(u,v)$$

となる。この不等式を(2) に代入して

$$|(T^2u)(x)-(T^2v)(x)|=|T^2(u-v)(x)|=|T(Tu-Tv)(x)|\le\frac{M^2|x-a|^2}{2!}d(u,v)$$

となる。これを繰り返し

$$|(T^\ell u)(x) - (T^\ell v)(x)| \le \frac{M^\ell |x-a|^\ell}{\ell!} d(u,v)$$

なることは ℓ に関する帰納法で示される。一方、$\lim_{\ell\to\infty} \frac{M^\ell |x-a|^\ell}{\ell!} = 0$ だから、m を大きく採れば $\frac{M^m |x-a|^m}{m!} < 1$ となる、即ち、T^m は縮小写像となる。

完備な距離空間の縮小写像は唯一つの不動点を持つことは知られている。即ち、$T^m v = v$ とすると $T^m(Tv) = T^{m+1}v = T(T^m v) = Tv$ だから Tv も T^m の不動点になる。T^m の不動点は一意的だから、$Tv = v$ でなければならない。即ち、T^m の不動点は T の不動点でもある。また、T の不動点も唯一つであることも同様に示される。

これらより、上で定義された写像 T は唯一つの解を持つ。

注意：直接、逐次近似で

$$u_0(x) = f(x), \quad u_{n+1}(x) = \int_a^x K(x,y) u_n(y) dy + f(x)$$

が完備距離空間 $(C([a,b]), d)$ で Cauchy 列になることを示せばよい。$L = \max_{x\in[a,b]} |f(x)|$ とおくと

$$|u_{n+1}(x) - u_n(x)| = \left| \int_a^x K(x,y)(u_n(y) - u_{n-1}(y)) dy \right| \le \frac{M^{n+1}|x-a|^{n+1} L}{(n+1)!}$$

となることは、帰納法で示される。これより $m > n$

$$|u_m(x) - u_n(x)| = |\sum_{k=n}^{m-1} (u_{k+1}(x) - u_k(x))| \le \sum_{k=n}^{m-1} \frac{M^k |x-a|^k L}{k!}$$

に注意すれば Cauchy 列になる。また、一意性は、もし２つ解 u, v があるとして

$$|u(x) - v(x)| = |Tu(x) - Tv(x)| \le \frac{M^k |x-a|^k}{k!} d(u,v) \to 0 \quad (k \to \infty)$$

から従う。