微分方程式概論 第13回講義内容（2006年07月21日）井上淳

1 常微分方程式の初等解法

2 常微分方程式の基礎定理

3 線形常微分方程式の一般論

4 変分原理：Lagrange 方程式と Hamilton 方程式

4.1 汎関数の微分

4.2 極値曲線、停留点

付録：ノルム空間上の関数の微分

4.3 Lagrange 方程式

4.4 Legendre 変換

4.5 Hamilton 方程式

4.5.1 Liouville の定理

4.5.2 １注意

5 付録：解の延長

6 付録：解の一意性

7 測地線の方程式

有限次元空間 $\mathbb{R}^m$ 上の２点 P, Q を結ぶ最短線は直線となる（と信じている?)。この信念？が「曲がった空間」（一般の多様体）ではどうなるだろうか？例えば、光線は直進すると考えているが、空気中から水に光が進むと、水中の物体は実際の深さにあるよりも浮いて見える。

(M, g) を Riemann 多様体とする。以下、曲った多様体に馴染みがない人は $M = \mathbb{R}^n$、或いは必要ならば $M = \mathbf{T}^n$ と考えて理解すれば、少なくとも「微分方程式」的にはほぼ十分である。

以下の記述は

Y.Choquet-Bruhat, C. deWitt-Morette:Analysis, Manifolds, and Physics, Part I, Foundations, and Part II, Applications,
から借用した。

$(q,\dot{q})\in TM$ に対し

$$L(q,\dot{q})=\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}g_{ij}(q)\dot{q}^i\dot{q}^j$$

なる関数を考える。但し、行列 $(g_{ij}(q))$ は正定値[1]対称行列であり、座標は微分幾何の伝統に従って $q=(q^1,\cdots,q^n)$, $\dot{q}=(\dot{q}^1,\cdots,\dot{q}^n)$ と書く。曲線 $\gamma(t)$ で $\gamma(\underline{t})=\underline{q}$, $\gamma(\bar{t})=\bar{q}$ を満たすもので、長さ汎関数

$$J(\gamma)=\int_{\underline{t}}^{\bar{t}}dt\,\sqrt{L(\gamma(t),\dot{\gamma}(t))}$$

或いはエネルギー汎関数

$$E(\gamma)=\int_{\underline{t}}^{\bar{t}}dt\,L(\gamma(t),\dot{\gamma}(t))$$

の極値を与えるものを考える。

注意 1：時間の変更 $\psi:[\alpha,\beta]\in\tau\to t\in[a,b]$ に対し $\tilde{\gamma}=\gamma\circ\psi$ とおくと $J(\gamma)=J(\tilde{\gamma})$ である。

実際、$t=\psi(\tau)$, $a=\psi(\alpha)$, $b=\psi(\beta)$ とすると

$$\dot{\tilde{\gamma}}^j=\psi'(\tau)\dot{\gamma}^j(\psi(\tau))$$

となるから

$$\begin{aligned}L(\tilde{\gamma},\dot{\tilde{\gamma}})&=\frac{1}{2}g_{jk}(\psi)(\psi')^2\dot{\gamma}^j(\psi)\dot{\gamma}^k(\psi)\\&=|\psi'(\tau)|^2\left(\frac{1}{2}g_{jk}(t)\dot{\gamma}^j(t)\dot{\gamma}^k(t)\right)\Big|_{t=\psi(\tau)}\end{aligned}$$

であり、積分記号下の変数変換公式より結論が従う。

そこで、パラメタ t が、その道 γ に沿って $L(\gamma(t),\dot{\gamma}(t))$ が一定となるように取れているとき、その道は弧長で表示されているという。

注意 2：しかし、時間の変更を上の注意のようにするとき $E(\gamma)\neq E(\tilde{\gamma})$ である。

定義 7.1 一般に、*2* 点を結ぶ $J(\gamma)$ を最小にする γ を、測地線という。

注意 3：E の臨界点は、弧長で表示された道に関する J のそれであり、J のどんな臨界点も E の臨界点である道にもなる。そこで、E の臨界点を与える道も測地線という。

予想されるように、測地線は 2 点 $\underline{q}$ と $\bar{q}$ を結ぶ最短経路であるのだが、それが満たすべき方程式は

$$\frac{d}{dt}\frac{\delta L}{\delta\dot{q}(t)}=\frac{\delta L}{\delta q(t)}\quad 但し\quad \frac{\delta L}{\delta\dot{q}}=\frac{\partial L(q,\dot{q})}{\partial\dot{q}}\Big|_{q=q(t),\dot{q}=\dot{q}(t)},\quad \text{etc.}$$

即ち、

$$g_{ij}\ddot{q}^j-\Gamma_{ijk}\dot{q}^j\dot{q}^k=0,\tag{1}$$

で、両端点で

$$q^i(\underline{t})=\underline{q}^i,\ q^i(\bar{t})=\bar{q}^i,$$

[1]多変数関数の Taylor 展開と極小値の十分条件を思い出し、正定値行列の定義を思い出そう

となるものである。これを、どう解けばいいのかがここ暫くの目標である。

(1) の証明: $\frac{\delta L}{\delta \dot{q}^i} = g_{ij}\dot{q}^j$ より

$$g_{ij}\ddot{q}^j + \frac{\partial g_{ij}}{\partial q^k}\dot{q}^k\dot{q}^j = \frac{1}{2}\frac{\partial g_{kl}}{\partial q^i}\dot{q}^k\dot{q}^l.$$

ところで、添字を付け替えれば

$$\frac{\partial g_{ik}}{\partial q^l}\dot{q}^k\dot{q}^l = \frac{\partial g_{il}}{\partial q^k}\dot{q}^k\dot{q}^l$$

が成り立つから、

$$\Gamma_{ikl} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{kl}}{\partial q^i} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial q^l} - \frac{\partial g_{il}}{\partial q^k}\right)$$

とおいて(1) が導かれる。また (g^{ij}) を (g_{ij}) の逆行列とすると、

$$\ddot{q}^j = \Gamma^j_{kl}\dot{q}^k\dot{q}^l, \quad \Gamma^j_{kl} = g^{ij}\Gamma_{ikl}. \quad \square$$

7.0.3 測地線方程式の初期値問題

正接多様体 TM 上で測地線方程式

$$\dot{q}^j = v^j, \quad \dot{v}^j = -\Gamma^j_{k\ell}v^k v^\ell$$

を考える。任意の $x_0 \in M$ を取るとき、ある $\epsilon > 0$ と 0 の $T_{x_0}(M)$ の中での近傍 V があって、任意の $w \in V$ に対し

$$\gamma_w : [-\epsilon, \epsilon] \ni t \to \gamma_w(t) \in M$$

で初期条件

$$\gamma^j_w(0) = x^j_0 \quad \dot{\gamma}^j_w(0) = w^j$$

を満たす一意的な測地線がある[2]。

前に注意したように測地線は「時間変更」で不変だから、任意の $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ に対し $\gamma_w(t)$ が測地線ならば $\gamma_w(\lambda t)$ もそうである。そして

$$\left.\frac{d\gamma^j_w(\lambda t)}{d(\lambda t)}\right|_{t=0} = \frac{1}{\lambda}\left.\frac{d\gamma^j_w(t)}{dt}\right|_{t=0}$$

となっている。これは、「x_0 を通る任意の測地線は、0 の $T_{x_0}(M)$ の中での近傍を適切にとれるならば、定義域を $[-1, 1]$ まで拡張できる」ことを意味する。例えば、その近傍を $\{(w^j) \mid w/\epsilon \in V\}$ と取ればよい。

そこで、0 の $T_x(M)$ の中での近傍 W_x を適切にとったものとし、γ_w を x を通り x での接ベクトルを w とする測地線とする。このとき $w \to \gamma_w(1) \equiv \exp_x w$ と定義した写像 $\exp : W_x \to M$ を指数写像という。ここで $\exp(tw) = \gamma_{tw}(1) = \gamma_w(t)$ を注意しておこう。

定理 7.1 写像 $w \to \exp_x w$ は 0 の $T_x(M)$ の中での開近傍から x の開近傍の上への微分同型を与える。

証明: 写像 exp は $T_x(M)$ で微分可能だから、それの微分写像 $\exp' : T_0(T_x(M)) \to T_x(M)$ が x で同型であることを言えばよい。まず、明らかに $T_x(M)$ と $T_0(T_x(M))$ の次元は同じであることを注意しておく。$T_x(M)$ での曲線 $t \to tv$ は exp によって測地線 $t \to \exp(tv) = \gamma_v(t)$ の上に写像される。故に、$\exp'(v) = v$ となる。
$\square$

[2] 微分方程式の基本定理より

注意：ことのついでに、松島与三「多様体入門」裳華房より、写像の微分 を引用しておこう。まず、関数の微分を思い出そう。f を多様体 M の開集合上の可微分関数とし、$p \in M$ のとき、任意の $v \in T_p(M)$ に対し

$$T_p(M) \ni v \to (df)_p(v) = v(f) \in \mathbb{R}$$

とおく。$(df)_p$ を f の p における微分と呼ぶ。$(x^1, \cdots, x^n)$ を p における局所座標系とすると

$$(df)_p\left(\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p\right) = \frac{\partial f}{\partial x^i}(p)$$

となるから、特に

$$(dx^j)_p\left(\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p\right) = \delta^j{}_i$$

となる。故に、$\{(dx^1)_p, \cdots, (dx^n)_p\}$ は $T_p(M)$ の基底 $\{(\frac{\partial}{\partial x^1})_p, \cdots, (\frac{\partial}{\partial x^n})_p\}$ に双対な $T_p^*(M)$ の基底である。

２つの多様体 M, M' に対し可微分写像 $\varphi : M \to M'$ が与えられたとする。f を $\varphi(p)(p \in M)$ の近傍で定義された可微分関数とすると、$\varphi^* f = f \circ \varphi$ は p の近傍で定義された可微分関数である。任意の $v \in T_p(M)$ に対し

$$((\varphi_*)_p(v))(f) = v(\varphi^* f)$$

とおく。この $(\varphi_*)_p$ を可微分写像 φ の p における微分と呼ぶ。$(x^1, \cdots, x^n)$ と $(y^1, \cdots, y^m)$ を p 及び $\varphi(p)$ における局所座標系とし、

$$\varphi^* y^j = \varphi^j$$

とおくと

$$(\varphi_*)_p\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial \varphi^j}{\partial x^i}(p)\left(\frac{\partial}{\partial y^j}\right)_{\varphi(p)}$$

となる。

(U, φ) を多様体 M の局所座標系で $\varphi^{-1}(0) = x_0$ なるものとする。$\mathbb{R}^n$ の原点を通る直線の φ による像が M の測地線になるとき、局所座標系 (U, φ) を x_0 に関して正規であるという。写像 $T_x(M) \ni v \to (v^j) \in \mathbb{R}^n$ は微分同型だから、指数写像を M の任意の点の正規局所座標系の定義に用いることができる。(x^j) を $U \subset M$ での x_0 に関する正規局所座標系とするならば、x_0 を通る任意の測地線は

$$\gamma^j(t) = a^j t \qquad (a^j) \in \mathbb{R}^n$$

となる。このとき $\Gamma^j_{k\ell}(x_0) = 0$ となる。実際、

$$\Gamma^j_{k\ell}(a^m t) a^k a^\ell = 0 \quad \forall (a^j) \in \mathbb{R}^n$$

だからである。

定義 7.2 *Riemann* 多様体 M が x_0 で測地的に完備であるとは、任意の $v \in T_{x_0}(M)$ に対し $\exp_{x_0} v$ が定義できることである。*Riemann* 多様体 M が測地的に完備であるとは、任意の $x \in M$ と任意の $v \in T_x(M)$ に対し $\exp_x v$ が定義できることである。

注意：測地的に完備であることと、任意の測地線の定義域を $\mathbb{R}$ に拡張できることとは同値である。

この定理の証明に、正規局所座標系を用いるのだが、ここでは割愛する。

7.0.4 測地線方程式の両端固定問題

(1) は初期値問題が時間局所的に解けることは前の議論で分かった。問題は、与えられた 2 点間を結ぶ測地線があるのかであった。

(M,g) 上の 2 点 y と x に対して

$$d(x,y) = \inf_{\gamma \in \mathcal{C}_{b,a,x,y}} J(\gamma), \quad \mathcal{C}_{b,a,x,y} = \{[a,b] \text{ 上で区分的に微分可能な } \gamma \mid \gamma(a) = y,\ \gamma(b) = x\}$$

とおく。

定理 7.2 d は多様体 (M,g) 上の距離を与える。

証明：d の定義から、$d(x,y) \geq 0$, $d(x,y) = d(y,x)$ は明らかであろう。

任意の $\epsilon > 0$ に対して、$\gamma_1 : [a,b] \to M$, $\gamma_2 : [b,c] \to M$ でそれぞれ y と x、z と y を結ぶ区分的に微分可能な γ_j で

$$J(\gamma_1) - d(x,y) < \epsilon, \quad J(\gamma_2) - d(y,z) < \epsilon,$$

となるものがある。そこで $\gamma : [a,c] \to M, \gamma\big|_{[a,b]} = \gamma_1, \gamma\big|_{[b,c]} = \gamma_2$ と定義すれば[3]、

$$J(\gamma) \leq J(\gamma_1) + J(\gamma_2)$$

となる。一方

$$J(\gamma_1) + J(\gamma_2) < d(x,y) + d(y,z) + 2\epsilon$$

だから、三角不等式

$$d(x,y) + d(y,z) \geq d(x,z)$$

が成立する。

問題になるのは、$d(x,y) = 0$ ならば $x = y$ となるか？であり、これが示されれば d は距離関数であることが示される。これは以下の定理を用いて示される。 □

定理 7.3 任意の $x \in M$ に対し、近傍 U があって、任意の $y \in U$ に対し x と y を U 内で結ぶ一意的な測地線がある。また、この測地線の長さは $d(x,y)$ である。

定理 7.4 (Hopf-Rinow) (M,g) を連結な *Riemann* 多様体とするとき、以下は同値である。

(a) M は測地的に完備である。

(b) M はある点 $x_0 \in M$ で測地的に完備である。

(c) M は距離 d に関し完備である。

(d) M の任意の閉集合は、もし d に関し有界ならばコンパクトである。

系 7.1 すべてのコンパクト *Riemann* 多様体は測地的に完備である。

定理 7.5 完備連結な *Riemann* 多様体上では、任意の *2* 点 $x,y \in M$ は長さ $d(x,y)$ の測地線で結べる。

[3] ここで上に述べた性質 $J(\gamma) = J(\tilde{\gamma})$ が効いている

注意：測地線は必ずしも一意的ではない！球面上の北極点と南極点は同じ長さの無数の測地線で結べる。

注意：上の定理 7.3, 定理 7.4 の証明は

S. Kobayashi and K. Nomizu: Foundations of Differential Geometry vol I, Interscience Pub. 1963 の p.172 を見るとよい。勿論、自力で証明が考えられたら、それは素晴らしい事だし、一度調べてそのときは理解したのだがと自分で考え直してみるのも、素晴らしい事だ。

A　付録：数理生物学の問題から

以下の記述は、

佐藤總夫「自然の数理と社会の数理—微分方程式で解析する」1987, 日本評論社,

J. Mawhin: The legacy of Pierre-Francois Verhulst and Vito Volterra in population dynamics, “The first 60years of non-linear analysis of J. Mawhin” eds. Delgado et al, 2004, pp 147-160, World Scientific,

M. Braun: Differential Equations and Their Applications, Springer-Verlag, 1975,
等から借用した。

A.1　何故、第 1 次世界大戦中に地中海で鮫の水揚げ量が増えたのか？（捕食者ー被食者問題）

生物学者 D’Ancona は次のような統計に接し、何故かという疑問を呈した。

1914,	1915,	1916,	1917,	1918,	1919,	1920,	1921,	1923,	1924
11.9%,	21.4%,	22.1%,	21.2%,	36.4%,	27.3%,	16.0%,	15.9%,	14.8%,	10.7%

これは、イタリアのある漁港に水揚げされる漁獲量の内、鮫等が占める割合を第 1 次世界大戦期間を挟んで調べたもので、「何故戦争中の鮫等の漁獲量率が大幅に増加したのか？」が疑問である。漁業操業が大きく落ち込んだ為とするのでは、どうも腑に落ちない。これは、「漁業操業の程度がどう食用魚類の個体数に影響するのか？」という大きな問題を含んでいた。

生物学的な考察だけでは、この疑問に答えられないと感じた D’Ancona は婚約者の父の数学者 Volterra に尋ねた。Vito Volterra は捕食者と餌食の問題として数学的に定式化してみた。すなわち、すべての魚類を被食者個体数と捕食者個体数に分けその時間変化を追跡する為の方程式をたてることからはじめた。餌食となる種の総数を $x(t)$ とし、もし捕食者がいなければ Malthus の法則により変化率（自然増加率）は a 倍され、餌食は捕食者に接触することにより数が減る割合が $-bxy$ とする。一方捕食者の数 $y(t)$ は餌食がいなければ変化率（自然減少率）は $-c$ 倍され、餌食を見つける割合に応じて dxy 倍される、また漁業操業の強さ、即ち海上の漁船の数と海中の網の数、を定数 ϵ と想定して以下の式を導いた。

$$
\begin{cases}
\dfrac{dx}{dt} = \tilde{a}x - bxy, & \tilde{a} = a - \epsilon, \\
\dfrac{dy}{dt} = -\tilde{c}y + dxy, & \tilde{c} = c + \epsilon.
\end{cases} \tag{2}
$$

もしこの式が成立すると、以下の結果が成り立つ。

まず、(2) が２つの平衡解

$$(x(t), y(t)) = (0, 0), \quad (x(t), y(t)) = (\tilde{c}/d, \tilde{a}/b)$$

を持つことが分かる。

また、任意の $\underline{x}$, $\underline{y}$ に対し

$$(x(t),y(t))=(\underline{x}e^{\tilde{a}t},0)\quad (x(t),y(t))=(0,\underline{y}e^{-\tilde{c}t})$$

は(2) の解をなす。

$x,y\neq 0$ のとき、(2) の軌道 $(x(t),y(t))$ は、１階微分方程式

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-\tilde{c}y+dxy}{\tilde{a}x-bxy}=\frac{y(-\tilde{c}+dx)}{x(\tilde{a}-by)}$$

を満たすので、

$$\frac{\tilde{a}-by}{y}\frac{dy}{dx}=\frac{-\tilde{c}+dx}{x}$$

となる。これは変数分離形なので

$$\tilde{a}\log y-by+\tilde{c}\log x-dx=\mathrm{const}$$

より

$$\frac{y^{\tilde{a}}}{e^{by}}\frac{x^{\tilde{c}}}{e^{dx}}=K=\mathrm{const.}\tag{3}$$

を満たす。

補題 A.1 方程式(3) は、$x,y>0$ において、閉曲線群を定める。

証明：$x,y>0$ において、関数 $f(y)=y^{\tilde{a}}/e^{by}$ と $g(x)=x^{\tilde{c}}/e^{dx}$ を考える。$f(0)=0$, $\lim_{y\to\infty}f(y)=0$ であり、$y>0$ で $f(y)\geq 0$ となる。また

$$f'(y)=\frac{\tilde{a}y^{\tilde{a}-1}-by^{\tilde{a}}}{e^{by}}=\frac{y^{\tilde{a}-1}(\tilde{a}-by)}{e^{by}}$$

となるから、$y(t)$ は $y=\tilde{a}/b$ において唯一つの臨界点をもつ。故に、 $f(y)$ は $y=\tilde{a}/b$ において最大値

$$M_y=\frac{(\tilde{a}/b)^{\tilde{a}}}{e^{\tilde{a}}}$$

をとる。同様に、関数 $g(x)$ は $x=\tilde{c}/d$ において最大値

$$M_x=\frac{(\tilde{c}/d)^{\tilde{c}}}{e^{\tilde{c}}}$$

をとる。

故に、(3) は $K>M_yM_x$ のときは $x,y>0$ を満たす解はない。$K=M_yM_x$ のときは唯一つの解 $x=\tilde{c}/d$, $y=\tilde{a}/b$ を持つ。そこで $\lambda<M_x$ なる正数をとり $K=\lambda M_y$ の場合を考える。方程式 $x^{\tilde{c}}/e^{dx}=\lambda$ は、解 $x=x_m<\tilde{c}/d$ と解 $x=x_M>\tilde{c}/d$ を持つから、方程式

$$f(y)=y^{\tilde{a}}e^{-by}=\left(\frac{\lambda}{x^{\tilde{c}}e^{-dx}}\right)M_y$$

は x が x_m より小さいか、x_M より大きいとき、解 y を持たない。$x=x_m$ または $x=x_M$ のとき、１つの解 $y=\tilde{a}/b$ を持つ。x が x_m と x_M の間にあるとき、２つの解 $y_m(x)$ と $y_M(x)$ を持ち、小さい方の解は常に $y_m(x)<\tilde{a}/b$ を、大きい方の解は常に $y_M(x)>\tilde{a}/b$ となる。x を x_m または x_M に近付けると、$y_m(x)$ と $y_M(x)$ の両方が $\tilde{a}/b$ に近づく。従って(3) で定義された曲線は $x,y>0$ のとき閉じている。これらの閉曲線は $x=\tilde{c}/d$、$y=\tilde{a}/b$ の場合を除いて、どれも(2) の平衡点を含まない。故に、(2) の解 $(x(t),y(t))$ で $x(0)>0$, $y(0)>0$ となるものは、全ての時刻について周期関数であり、その周期を $T>0$ とする。 □

系 A.1 第 1 象限から始まる(2) の全ての解 $(x(t), y(t))$ はその象限にとどまる。

D'Ancona のデータは、実際には補食者割合の 1 年の平均である。そこで、(2) の解について「平均値」を考察する必要がある。以下の補題は、$(x(t), y(t))$ を正確に分からなくとも平均値は計算できることを示すものである。

補題 A.2 $(x(t), y(t))$ を方程式(2) の周期解で、周期を $T > 0$ とする。このとき

$$\tilde{x} = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)dt, \quad \tilde{y} = \frac{1}{T}\int_0^T y(t)dt$$

と定義すると

$$\tilde{x} = \frac{\tilde{c}}{d}, \quad \tilde{y} = \frac{\tilde{a}}{b}$$

となる。

証明：(2) の第 1 式の両辺を x で割ると、$\dot{x}/x = \tilde{a} - by$ を得る。これより

$$\frac{1}{T}\int_0^T \frac{\dot{x}}{x}dt = \frac{1}{T}\int_0^T (\tilde{a} - by)dt$$

となる。一方

$$\int_0^T \frac{\dot{x}}{x}dt = \log x(T) - \log x(0)$$

であり、周期 $T > 0$ の周期解だから $x(T) = x(0)$、故に

$$\frac{1}{T}\int_0^T by(t)dt = \frac{1}{T}\int_0^T \tilde{a}dt = \tilde{a}.$$

同様に、第２式を計算すればよい。 □

$$M_y = \frac{(\tilde{a}/b)^{\tilde{a}}}{e^{\tilde{a}}}, \quad M_x = \frac{(\tilde{c}/d)^{\tilde{a}}}{e^{\tilde{a}}}$$

とおく。

定理 A.1 初期データ $(x(0), y(0))$ が

$$\frac{y(0)^{\tilde{a}}}{e^{by(0)}}\frac{x(0)^{\tilde{c}}}{e^{dx(0)}} < M_x M_y$$

を満たすならば、(2) のすべての解は $(x(t), y(t))$ は第 1 象限に存在する。即ち、絶滅しない。

Volterra の原理：適度な漁業操業 $(\tilde{a} > 0)$ では平均して食用魚の個体数は増加し、サメ類の個体数は減少する。漁業操業が減少すると、サメ類の個体数は増加し、食用魚の個体数は減少する。

この Volterra の原理は捕食者と被食者の両方の昆虫を駆除してしまう殺虫剤の使用法に警告を与えている。殺虫剤を使用することは、むしろ、他の捕食昆虫によって制御されていた昆虫の個体数を増やすことを意味する可能性があるからである。実際、殺虫剤 DDT がカイガラムシ駆除のために開発され、果樹栽培者はカイガラムシを更に減らそうとしてこれを用いたが、Volterra の原理で予想された通り、カイガラムシを増やすことになった。オーストラリアで多い蠅を減らすために、放牧牛、羊の糞の処理を殺虫剤ではなく黄金虫にさせ、成功しているようだ。また、野生のウサギによる作物への被害をおさえるためにバクテリア？か何かを用いて、幾分か成功したようだが、今度はそれに耐性をもったウサギが増えているとのこと。

A.2 人口動力学から

人口数の変化はどう「決まって」いるのだろうか？

$$p(t):\text{時刻 } t \text{ での人口サイズ},\ \ m(t):\text{時刻 } t \text{ での人口増加率},$$
$$n(t):\text{時刻 } t \text{ で人口増加に伴う生きにくさ},\ \ r(t):\text{時刻 } t \text{ での環境変化}$$

とすると、時刻 t での人口サイズは次の方程式を満足するだろうという想定より

$$p'(t) = p(t)[m(t) - n(t)p(t)] - r(t) \tag{4}$$

なる方程式が立てられる。

Malthus は 1798 年に「もし人口増加に対する障害が無いとすると、人口は幾何学的に増加する」と発表をした。それを数学的に書き表わしたのが Verhulst で、1838 年の論文が人口動力学の基礎となった。Malthus 理論は上の方程式で $m(t) = m$, $n(t) = 0$, $r(t) = 0$ とした場合で、$p(t) = \underline{p}\,e^{mt}$ となる。Verhulst は人口が増加すること自身が増加を押さえるからその項を付け加えるべきだとして、その項の最も簡単なモデル候補として、$-np^2(t)$ を導入した。上の式(4) はこの係数が時間によるとした方が自然だろうという最近の考えによる。Verhulst はこれらのモデルを用い、フランス、ベルギー等の人口変化統計から m, n を推定し、幾つかの予測をした。例えば、彼の最後の論文でのベルギーの人口の予測最大数は 9400000 人程度だろうとした。2004 年の統計では 10348276 人という。彼の論文での統計は 1815-1833 年の必ずしも正確でない？ものであったというのだから、凄い精度と言えるのではないだろうか。

(4) で $r(t) = 0$ とすると、$M(t) = \int^t m(s)ds$ として

$$p(t) = \underline{p}\,e^{(M(T)-M(0))}\left[1 + \underline{p}\int_0^t n(s)e^{(M(s)-M(0))}ds\right]^{-1}$$

なる解を持つ。特に、$m(t), n(t)$ が周期 T の周期関数のときは、$t \to \infty$ のとき初期値を

$$\underline{p} = \left[e^{(M(T)-M(0))} - 1\right]\left[\int_0^T n(s)e^{(M(s)-M(0))}ds\right]^{-1}$$

とする解に近づく。季節的な収穫等の環境の変化を $r(t) \not\equiv 0$ とすると、もう解の具体形は一般的には求められない[4]。最近得られた結果は、『ある定数 $r_0 > 0$ があって(4) は、$\bar{r} = T^{-1}\int_0^T r(s)ds$ が $\bar{r} < r_0$, $\bar{r} = r_0$, $\bar{r} > r_0$ に応じて周期 T の解を 2,1,0 個持つ。』

ローマクラブの提言「成長の限界」の人口増加に関する予測はデータが 1970 年までのものだが、2000 年では驚くべき一致を見ている。これはどういう数理モデルを用いたのか？

A.3 集団生物学における競争排除原理

競争排除原理：自然界では、２つの似た種が限られた食物と居住空間を争う生存競争の結果は、ほとんど常に一方が絶滅する。

問題：この原理を数学的モデルで厳密に説明できるのか？

まず、人口増加の Logistic 方程式

$$\frac{dN}{dt} = aN - bN^2$$

[4] Riccati 型だから。何故そう言えるのか？調べてみてはどうかな

を考える。これは、ある１つの種が、その種の中で、限られた食料や生息空間を取り合っているときの個体数 $N(t)$ の変化をあらわしている。$t \to \infty$ のとき $N(t)$ は限界値 $K = a/b$ に近づくことは知られている。この個体数の限界値は、その生態系が支え得るその種の最大個体数と考えられる。K を用いて

$$\frac{dN}{dt} = aN\left(1 - \frac{b}{a}N\right) = aN\left(\frac{K-N}{K}\right)$$

と書き換えると、この方程式は以下のように解釈できる。個体数 $N(t)$ が非常に小さいとき、個体数は、Malthus の人口法則 $dN/dt = aN$ に従って増加する。aN の項は「生物生産能力」と呼ばれる。これは理想的状態における その種の繁殖率であり、食料や生息空間に関する制限が無く、個々のメンバーが有毒な排泄物を出さないならば、この値が実現される。しかし、個体数が増加すると、生態系の空きスペースに関係する $(K-N)/K$ によって、生物生産能力は減少する。生態学者はこれを「環境抵抗」と呼ぶ。

$N_1(t)$ と $N_2(t)$ を、それぞれ時刻 t における種 1 と種 2 の個体数とする。また、K_1 と K_2 を生態系が支持できる種 1 と種 2 の個体数の最大値とし、a_1N_1 と a_2N_2 を種 1 と種 2 の生物生産能力とする。このとき、$N_1(t)$ と $N_2(t)$ は連立微分方程式

$$\begin{cases} \dfrac{dN_1}{dt} = a_1N_1\left(\dfrac{K_1 - N_1 - m_2}{K_1}\right), \\ \dfrac{dN_2}{dt} = a_2N_2\left(\dfrac{K_2 - N_2 - m_1}{K_2}\right) \end{cases} \tag{5}$$

を満たす。ここで、m_2 は、種 2 のメンバーによって取り上げられた種 1 のメンバーの場所である。m_1 についても同様とする。

この m_1、m_2 がどういう性質を持つのかが生態学の問題である。一方の種が他方の種に及ぼす影響の度合いを、定数 α, β によって

$$m_1 = \beta N_1, \quad m_2 = \alpha N_2$$

と表される場合を考察する。２つの種に利害関係が無く、異なる生態系地位を占める場合、α と β は共に０となる。２つの種が同じ生態系地位を要求し、かつ、互いに似通った種の場合、α と β は 1 に近づく。一方の種、例えば種 1 が膨大な食料を必要としたり、非常に毒性のある排泄物を出したりする場合、種 1 の 1 個体は種 2 の多くの個体の場所を取り上げる、すなわち、係数 β は非常に大きくなる。

以下では２つの種がほぼ同一と言える程似通っていて同じ生態系地位を占めるものとする。そこで、(5) において $m_1 = N_1, m_2 = N_2$ $(\alpha = \beta = 1)$ の場合、すなわち、連立微分方程式系

$$\begin{cases} \dfrac{dN_1}{dt} = a_1N_1\left(\dfrac{K_1 - N_1 - N_2}{K_1}\right), \\ \dfrac{dN_2}{dt} = a_2N_2\left(\dfrac{K_2 - N_2 - N_1}{K_2}\right) \end{cases} \tag{6}$$

を考察する。

定理 A.2 (競争排除原理) ２つの種が(6) に支配されて個体数を変化させるものとする。$K_1 > K_2$ とするとき、$t \to \infty$ のとき

$$(N_1(t), N_2(t)) \to (K_1, 0)$$

となる。

解釈： これは、種 1 と種 2 がほぼ同一といえるほど似通っていて、生態系が種 2 より種 1 を多く支えることができる場合、種 2 は最終的には排除される。

補題 A.3 第 1 象限 *($N_1 > 0, N_2 > 0$)* から始まる(6) の全ての解 $(N_1(t), N_2(t))$ は決して負にならない。

証明：$N_2(t)=0$ とすると、(6) の第１式が変数分離形だから、任意の $N_1(0)$ に対して

$$N_1(t)=\frac{K_1N_1(0)}{N_1(0)+(K_1-N_1(0))e^{-a_1t}},\quad N_2(t)=0$$

としたものは(6) の解である。N_1-N_2 平面におけるこの解の軌道は、

1. $N_1(0)=0$ のときは点 $(0,0)$ である。
2. $0<N_1(0)<K_1$ のときは直線 $0<N_1(t)<K_1,\ N_2=0$ である。
3. $N_1(0)=K_1$ のときは 点 $(K_1,0)$ である。
4. $N_1(0)>K_1$ のときは直線 $K_1<N_1(t)<\infty,\ N_2=0$ である。

よって、$N_1\geq 0$ のときは N_1-軸は、４つの軌道の和集合である。

同様に、$N_2\geq 0$ のときは N_2-軸は、４つの(6) の軌道の和集合である。

N_1-N_2 平面における第１象限 $(N_1>0,N_2>0)$ から始まる(6) の全ての解 $(N_1(t),N_2(t))$ は未来においても第１象限にある。これは、もし第１象限 $(N_1>0,N_2>0)$ から始まる(6) のある解 $(N_1(t),N_2(t))$ がある時刻 $t=t^*$ で第１象限を離れるとするならば、$N_1(t^*)=0$ 或いは $N_2(t^*)=0$ となり、上に述べた軌道の分類から、矛盾が導かれるからである。　□

N_1-N_2 平面における２つの平行線を

$$\ell_1:K_1-N_1-N_2=0,\quad \ell_2:K_2-N_1-N_2=0$$

とすると、この平行線は N_1-N_2 平面における第１象限を

$$\begin{aligned}
I&=\{(N_1,N_2)\mid K_2-N_1-N_2>0\}\Longrightarrow \dot N_1>0,\ \dot N_2>0,\\
II&=\{(N_1,N_2)\mid K_2-N_1-N_2<0,\quad K_1-N_1-N_2>0\}\Longrightarrow \dot N_1>0,\ \dot N_2<0,\\
III&=\{(N_1,N_2)\mid K_1-N_1-N_2<0\}\Longrightarrow \dot N_1<0,\ \dot N_2<0,
\end{aligned}$$

と３つの領域に分ける。

まず、２つの一般的な補題を用意しおく。

補題 A.4 $g(t)$ を、ある定数 c に対して、$t\geq t_0$ において $g(t)\leq c\ (\geq c)$ を満たす単調増加（減少）関数とする。このとき、$t\to\infty$ とするとき、$g(t)$ は極限値を持つ。

補題 A.5 $\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{f}(\mathbf{x})$ の解 $\mathbf{x}(t)$ が、$t\to\infty$ のとき $\boldsymbol{\xi}$ に近づくとすると、$\boldsymbol{\xi}$ は $\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{f}(\mathbf{x})$ の平衡解である。

補題 A.6 時刻 $t=\underline{t}$ において、領域 I から始まる(6) の全ての解 $(N_1(t),N_2(t))$ は、未来においてこの領域を必ず離れる。

証明：(6) のある解 $(N_1(t),N_2(t))$ が $t\geq\underline{t}$ において、領域 I にとどまると仮定し矛盾を導く。こう仮定すると、$N_1(t)$ と $N_2(t)$ の両方が、$t\geq\underline{t}$ において K_2 を越えない単調増加関数なることを意味する。従って、補題 A.4 を用いて、$t\to\infty$ のとき、$N_1(t)$ と $N_2(t)$ はそれぞれ極限値 ξ,η を持つ。また、補題 A.5 は、(ξ,η) が(6) の平衡点であることを示している。一方、(6) の平衡点は $(0,0)$, $(K_1,0)$, $(0,K_2)$ のみであり、(ξ,η) はこれらとは異なるから、矛盾が導かれた。故に、領域 I から始まる(6) の全ての解 $(N_1(t),N_2(t))$ は未来においてこの領域を必ず離れる。　□

補題 A.7 時刻 $t=\underline{t}$ において、領域 II から始まる(6) の全ての解 $(N_1(t),N_2(t))$ は、未来においてもこの領域にとどまり、最終的に平衡解 $(K_1,0)$ に近づく。

証明：$t=t^*$ において(6) のある解 $N_1(t)$、$N_2(t)$ が領域 II を離れると仮定する。(6) の解が領域 II を離れるには、直線 ℓ_1 か ℓ_2 と交差しなければならないから、$\dot{N}_1(t^*)$ か或いは $\dot{N}_2(t^*)$ は 0 とならねばならない。$\dot{N}_1(t^*)=0$ のときは、(6) の第 1 式を t について微分して $t=t^*$ とすると、

$$\frac{d^2N_1(t^*)}{dt^2}=\frac{-a_1N_1(t^*)}{K_1}\frac{dN_2(t^*)}{dt}$$

となる。右辺は正である。従って、$N_1(t)$ は $t=t^*$ において最小値をとる。しかしこれは不可能。何故ならば、(6) の解 $N_1(t)$、$N_2(t)$ が領域 II にある限り、$N_1(t)$ は増加するからである。

$\dot{N}_2(t^*)=0$ のときも同様の推論で矛盾が導かれる。これより、領域 II から始まる(6) の全ての解 $(N_1(t),N_2(t))$ は、未来においてもこの領域にとどまる。このことは、$t\geq\underline{t}$ において $N_1(t)$ は単調増加、$N_2(t)$ は単調減少で、$N_1(t)<K_1$, $N_2(t)>K_2$ を満たすことを意味する。従って、補題 A.4 より、$t\to\infty$ のとき $N_1(t)$、$N_2(t)$ はそれぞれ極限値 ξ、η を持つ。補題 A.5 より、(ξ,η) が(6) の平衡点となるが、(ξ,η) は $(0,0)$ でも $(0,K_2)$ でもない。故に、(ξ,η) は $(K_1,0)$ である。 □

補題 A.8 時刻 $t=\underline{t}$ において、領域 III から始まり未来においてもこの領域にとどまる(6) の全ての解 $(N_1(t),N_2(t))$ は、$t\to\infty$ のとき平衡解 $(K_1,0)$ に近づく。

証明：(6) のある解 $N_1(t)$、$N_2(t)$ が $t\geq\underline{t}$ において領域 III にとどまるならば、$N_1(t)$、$N_2(t)$ は共に $t\geq\underline{t}$ において時刻に関する単調減少関数で、$N_1(t)>0$、$N_2(t)>0$ を満たす。補題 A.4 より、$t\to\infty$ のとき $N_1(t)$、$N_2(t)$ はそれぞれ極限値 ξ、η を持つ。補題 A.5 より、(ξ,η) は(6) の平衡点となるが、(ξ,η) は $(0,0)$ でも $(0,K_2)$ でもない。故に、(ξ,η) は $(K_1,0)$ である。 □

定理 A.2 の証明：補題 A.6, A.7 は、時刻 $t=\underline{t}$ において領域 I または II から始まる(6) のすべての解 $N_1(t)$、$N_2(t)$ は $t\to\infty$ のとき平衡解 $(K_1,0)$ に近づくことを示している。同様に補題 A.8 は, 時刻 $t=\underline{t}$ において領域 III から始まり、未来においても常にこの領域にある(6) のすべての解 $N_1(t)$、$N_2(t)$ は平衡解 $(K_1,0)$ に近づくことを述べている。ℓ_1 または ℓ_2 から始まる(6) のすべての解 $N_1(t)$、$N_2(t)$ は直ちに領域 II に入る。最後に、(6) のある解 $N_1(t)$、$N_2(t)$ が領域 III から離れる場合、直線 ℓ_1 を横切り直ちに領域 II に入るのだから、補題 A.5 から、この解は平衡解 $(K_1,0)$ に近づく。 □

===========

メモ：最後までの受講者 13 名程か、ご苦労様。