# 微分方程式概論レポート問題 7（2006 年 06 月 30 日）提出：次回講義終了時

$\boxed{1}$ $u_1, \cdots, u_n \in C^{n-1}(\mathbb{R})$ に対する Wronskian を $W(x)$、即ち、

$$W(x) = \det \begin{pmatrix} u_1(x) & u_2(x) & \cdots & u_n(x) \\ u_1'(x) & u_2'(x) & \cdots & u_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ u_1^{(n-1)}(x) & u_2^{(n-1)}(x) & \cdots & u_n^{(n-1)}(x) \end{pmatrix}$$

とする。ある $x_0 \in \mathbb{R}$ に対して $W(x_0) \neq 0$ となるならば $u_1, \cdots, u_n$ は一次独立であることを示せ。

$\boxed{2}$ $\mathbf{u} = {}^t(u_1, \cdots, u_n)$ に対する 1 階斉次線形常微分方程式系

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt}(x) = A(x)\mathbf{u}(x) \quad ---- \quad (*)$$

を考える。但し、$A(x) = (a_{ij}(x))$, $a_{ij} \in C(\mathbb{R})$ $(1 \leq i, j \leq n)$ とする。このとき以下を示せ。

(1) $\mathbf{u}_1, \cdots, \mathbf{u}_n \in C^1(\mathbb{R}; \mathbb{R}^n)$ をそれぞれ (*) の解とし、それらの Wronskian を $W(x) = \det(\mathbf{u}_1(x), \cdots, \mathbf{u}_n(x))$ と定める。このとき

$$\frac{dW}{dx}(x) = (\mathrm{tr}\ A(x))W(x)$$

となる。但し、tr $A$ は行列 $A$ のトレースである。

(2) $X = \{\mathbf{u} \in C^1(\mathbb{R}; \mathbb{R}^n) \mid \mathbf{u}$ は (*) を満たす $\}$ はベクトル空間 $C^1(\mathbb{R}; \mathbb{R}^n)$ の $n$ 次元部分空間となる。