ODE 試験問題候補　　　担当　井上　淳

$\boxed{1}$(Edinburgh Univ.Technical Maths.1959) k は定数として、ある物質の時刻 t での量 $x = x(t)$ が化学反応式

$$\frac{dx}{dt} = k(3-x)(6-x)$$

で表示されるように変化しているとする。
(i) $x(0) = 0$, $x(10) = 1$ となることから k を定めよ。
(ii) $x(30)$ の値を求めよ。

$\boxed{2}$(Birmingham C.A.T. Technological Math.I, 1962) 以下の微分方程式の一般解を求めよ。

$$(i)\ x(1-x^2)\frac{dy}{dx} + (2x^2-1)y = x^3, \quad (ii)\ \frac{dy}{dx} = \frac{y^3+3x^2y}{x^3+3xy^2}.$$

$\boxed{3}$(Birmingham C.A.T. Technological Math.I, 1961) 以下の微分方程式の一般解を求めよ。

$$(i)\ \frac{dy}{dx} = y\tan x - 2\sin x, \quad (ii)\ x\frac{dy}{dx} + y = y^2\log x, \quad (iii)\ (y^2-3x^2)x\frac{dy}{dx} = (x^2-3y^2)y.$$

$\boxed{4}$(Edinburgh Univ.Technical Maths.1959) 以下の微分方程式の一般解を求めよ。

$$(i)\ (2x-3y+1)dx + (6y-4x+3)dy = 0, \quad (ii)\ y(1+x^4y^3)dx + xdy = 0.$$

$\boxed{5}$(Imperial College, B.Sc.Eng.II,1956) 以下の微分方程式の一般解を求めよ。

$$(i)\ \frac{dy}{dx} = \frac{2x+2y-2}{3x+y-5}, \quad (ii)\ (x+\cos y)dx + (\tan y - x\sin y)dy = 0.$$

$\boxed{6}$(Southampton Univ.B.Sc.Eng.I,1963) 以下の微分方程式の解を求めよ。

$$(a)\ \frac{dy}{dx} = \frac{y(x-y)}{x(x+y)}, \quad y(1) = 1.$$

以下の微分方程式の一般解を求めよ。

$$(b)\ yy'' + 2y'^2 = 0.$$

$\boxed{7}$(Cambridge Univ.M.T.I,1958) 以下の微分方程式の一般解を求めよ。

$$\frac{dy}{dx} - \frac{(x^2+1)y}{x(x^2-1)} = -\frac{4}{x^2-1}.$$

$x > 0$ のとき、如何なる一般解も $(1,2)$ を通ることを示し、$(1,2)$ での $\frac{dy}{dx}$ の値を $2A$ と書くとき、この解曲線の $A = -2, -1, 0, 1, 2$ での概略図を書け。

$\boxed{8}$(Durham Univ.B.Sc. in Pure Science,1956) 以下の微分方程式を解け。

$$\frac{d^2y}{dx^2}+9\frac{dy}{dx}+20y=10x^2+16e^{-4x}\cos(4x).$$

$\boxed{9}$(London Univ.Gen.B.Sc.I, 1955) 以下の微分方程式の解で $y(0)=0$ となるものの一般形を求めよ。

$$\frac{d^2y}{dx^2}+4y=x+\cos(2x).$$

$\boxed{10}$(Southampton Univ.B.Sc.Eng.II,1960) 以下の微分方程式系の解で $x(0)=0, y(0)=0, dx/dt(0)=1, dy/dt(0)=3$ となるものを求めよ。

$$\begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2}+3x-2y=0, \\ \dfrac{d^2x}{dt^2}+\dfrac{d^2y}{dt^2}-3x+5y=0. \end{cases}$$

(0)[関数の性質を微分方程式を用いて説明する方法]：初期値問題

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} x(\underline{t}) \\ y(\underline{t}) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \underline{x} \\ \underline{y} \end{pmatrix} \tag{1}$$

の解 $(x(t+\underline{t},\underline{t}), y(t+\underline{t},\underline{t}))$ を

$$\begin{pmatrix} x(t+\underline{t},\underline{t}) \\ y(t+\underline{t},\underline{t}) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \underline{x}\cos t+\underline{y}\sin t \\ -\underline{x}\sin t+\underline{y}\cos t \end{pmatrix}=\mathbb{U}(t+\underline{t},\underline{t})\begin{pmatrix} \underline{x} \\ \underline{y} \end{pmatrix}$$

と書く。微分方程式(1) の解の一意性より、三角関数の加法定理を導け。

(1) [Jacobi's elliptic functions の定義と幾つかの性質]：$0<k<1$ とし、次の方程式

$$\dot{x}=yz, \quad \dot{y}=-zx, \quad \dot{z}=-k^2xy, \quad x(0)=0,\ y(0)=z(0)=1$$

の解を用いて $\mathrm{sn}(t)=x(t)$, $\mathrm{cn}(t)=y(t)$, $\mathrm{dn}(t)=z(t)$ と定義する。これらは Jacobi's elliptic functions と呼ばれ、以下の性質を持つことを示せ。

(i) 関数 $\mathrm{sn}(t)$ は周期 $T=4\displaystyle\int_0^1\frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}}$ を持つ。

(ii) $t=\int_0^{\mathrm{sn}(t)}\frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}} \quad (|t|\le T/2)$.

(iii) 加法公式が成立する。

$$\mathrm{sn}(t+s)=\frac{\mathrm{sn}(t)\,\mathrm{cn}(s)\,\mathrm{dn}(s)+\mathrm{sn}(s)\,\mathrm{cn}(t)\,\mathrm{dn}(t)}{1-k^2\mathrm{sn}^2(t)\mathrm{sn}^2(s)}.$$

ヒント：関数 $x^2(t)+y^2(t)$, $k^2x^2(t)+z^2(t)$ は t に関し一定（微分方程式の第１積分）となっていること、及び上記微分方程式の解の一意性を用いよ。

(2) [比較定理]： ２つの連続関数 $f,\ g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ にたいして、不等式

$$f(t,x)\le g(t,x)$$

が成立しているとする。もし $\underline{x} \le \underline{y}$ ならば、初期値問題

$$\dot{x} = f(t,x), \quad x(\underline{t}) = \underline{x} \quad ; \quad \dot{y} = g(t,y), \quad y(\underline{t}) = \underline{y}$$

の解 $x(t)$ と $y(t)$ に対して、次の不等式

$$x(t) \le y(t) \quad (t \ge \underline{t})$$

が成立する（ヒント：ある時刻 $\bar{t}$ で $x(\bar{t}) > y(\bar{t})$ となるとどうなるか考えよ）。

(3) [Hermite 関数]： $e^{-z^2+2zx} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n H_n(x)$ によって関数 $H_n(x)$ を定めると、これは次の微分方程式を満たす。

$$(*) \qquad \frac{d^2y}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx} + 2ny = 0.$$

形式的に Fourier 変換 $\hat{y}(\xi) = (2\pi)^{-1/2} \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi} y(x) dx$ を用いて、ξ に関して 1 階の微分方程式に変換してみよ。実は、これも形式的だが、$y(x) = (2\pi)^{-1/2} \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi} \hat{y}(\xi) d\xi$ となることから、(*) の解について何が分かるか考えてみよ。(注意：「形式的に」というのは新しい概念を導入することによっていずれ「数学的に正当化される」が、気にせずに「ひたすら計算」してみよ）

(4) $\mathbb{R}^3$ 内の滑らかな曲面 $z = f(x,y)$ が次の方程式を満たすとき、極小曲面という。

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{f_x}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{f_y}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}\right) = 0.$$

(i) 汎関数 $J(f) = \iint (\sqrt{1+f_x^2+f_y^2} - 1) dxdy$ を変分して上記微分方程式を導け。
(ii) 回転面 $z = u(r)$, $r = \sqrt{x^2+y^2}$ が極小曲面となる条件は何か？
(iii) 助変数表示 $x = \varphi(s)\cos t$, $y = \varphi(s)\sin t$, $z = s$ で与えられる回転面が極小曲面となる φ に対する条件は何か？
(iv) 極小な回転面を全て求めよ。