「2006年度微分方程式概論」

期末試験問題解答例と採点、感想等　　井上　淳　revised 06.8.1.

採点基準：採点は中間 20, 期末 80 とし、それらの総点が 60 点以上はそのままで 100 点を越えた部分はカットした。総点が 60 未満の人はレポート提出点数と感想を適当に勘案した。受験者 18 名、100 点以上 6 名、不合格者 3 名であった。現時点で追試する気力を当方は持っていない。

感想について：講義で「一見解けそうにない難解な微分方程式を特殊な解法で解くところが見たかった」という感想があったが、これに応える事は難しい。常微分方程式、即ち、独立変数が 1 個の微分方程式は大概「解ける」ということを講義してきたし、基礎中の基礎であった。「一見解けそうだが、解がない（偏微分）方程式」については後学期の大学院の授業で説明する予定であるが、それにしても何かと予備知識が必要である。

初学者のうちは、「唯、言われたものを理解する努力をする」という考え方もある。赤ん坊の頃は、そのようにして、いつのまにか「言葉」という摩訶不思議なものを血肉にしていたのでは？大概の講義ではある程度は「何故このような事を考えるか、どういう道具を使うか」等一般的な事は必ずや述べているであろう。それ以上を願うときは、もっと具体的な事柄で質問しないと、答えようがない。何も努力しないで良い結果だけを得ようとするというのは、虫が良すぎる。宝くじでも、買うか、他人から貰い受ける、強奪する等の「努力」で籤自身を持っていなければ、決して当らない！

==

$\boxed{\mathbf{1}}$ 以下の微分方程式の一般解を求めよ。

$$(i)\ x(1-x^2)\frac{dy}{dx}+(2x^2-1)y=x^3, \qquad (ii)\ \frac{dy}{dx}=\frac{y^3+3x^2y}{x^3+3xy^2}.$$

解答例 [30]： (i)[15] まず、斉次方程式

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{2x^2-1}{x(1-x^2)}y$$

を解く。

$$\int\frac{dy}{y}=-\int dx\frac{2x^2-1}{x(1-x^2)}=-\int dx\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{2(x-1)}+\frac{1}{2(x+1)}\right)$$

より $y=Cx\sqrt{x^2-1}$ となる。そこで、定数変化法を用いると

$$\dot{C}=((x^2-1)^{-1/2})' \quad より \quad C(x)=(x^2-1)^{-1/2}+C_0.$$

故に

$$y(x)=x+C_0x\sqrt{x^2-1}.$$

注意：定数変化法を用いず非斉次方程式の特解を（ヤマカンで）$Ax+B$ という形で求める、或いは、特解を冪級数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ として求めるという答案もあった。勿論それでも結構。いきなり未定係数法で求めるという試みは、不可能ではないがかなり難しそうである。

(ii)[15] $z=y/x$ とおき、$y=xz$ より $\dot{y}=z+x\dot{z}$ となる。故に、

$$z+x\dot{z}=\frac{z^3+3z}{3z^2+1}, \quad \dot{z}=\frac{-2z^3+2z}{3z^2+1}\frac{1}{x}$$

だから

$$\int\frac{dx}{x}=\int dz\frac{3z^2+1}{-2z^3+2z}.$$

が従う。右辺は

$$\frac{3z^2+1}{-2z^3+2z} = \frac{1}{2z} - \frac{1}{z-1} - \frac{1}{z+1}$$

より

$$\frac{\sqrt{z}}{z^2-1} = Cx, \quad y^2 - C'\sqrt{xy} - x^2 = 0 \quad (C, C' > 0)$$

或いは

$$(x^2-y^2)^2 = Cxy \quad (C > 0),$$

これを満たす y が解の族を与える。

==

$\boxed{2}$ u に関する常微分方程式

$$u\frac{d^2u}{dx^2} + \left(\frac{du}{dx}\right)^2 + 1 = 0 \qquad (*)$$

を考える。

(1) $\frac{du}{dx}(x) = p(u(x))$ とおき $p = p(u)$ に関する微分方程式を導き、それの一般解を求めよ。

(2) (1) の結果を用いて、(*) の一般解を求めよ。

解答例 [20] : (1)[10]　合成関数の微分則より

$$\frac{dp(u)}{dx} = \frac{du}{dx}p'(u) = p(u)p'(u)$$

だから

$$u\left(\frac{dp(u)}{2du}\right)' + p^2(u) + 1 = 0,$$

であり

$$\int \frac{p'p}{p^2+1}dp = -\int \frac{1}{u}du$$

となる。これより

$$\log(u \cdot \sqrt{p^2+1}) = C, \quad p^2 = \frac{e^{2C}-u^2}{u^2}$$

すなわち、

$$p = \frac{du}{dx} = \sqrt{\frac{e^{2C}-u^2}{u^2}}.$$

(2)[10] 上より

$$\int \sqrt{\frac{u^2}{e^{2C}-u^2}}du = \int dx$$

である。$y = u^2$ と変数変換して

$$\int \frac{dy}{2\sqrt{e^{2C}-y}} = -(\sqrt{e^{2C}-y})' = (x+D)'$$

だから

$$y(x) = u(x)^2 = e^{2C} - (x+D)^2, \quad u(x) = \sqrt{\tilde{C} - (x+D)^2},\ \tilde{C} > 0.$$

==

$\boxed{3}$ 以下の微分方程式系の解で $x(0)=0, y(0)=0, dx/dt(0)=1, dy/dt(0)=3$ となるものを求めよ。

$$\frac{d^2x}{dt^2}+3x-2y=0, \tag{1}$$
$$\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{d^2y}{dt^2}-3x+5y=0. \tag{2}$$

解答例 [25]（行司起也）：$D=d/dt$ とおく。

$$(D^2+3)x=2y, \qquad (D^2+5)y=-(D^2-3)x$$

と書き換え、第 2 式に (D^2+3) を施して

$$(D^2+3)(D^2+5)y=-(D^2+3)(D^2-3)x=-2(D^2-3)y, \qquad (D^4+10D^2+9)y=0$$

となるから、a,b,c,d を未定の係数として

$$y(t)=a\cos 3t+b\sin 3t+c\cos t+d\sin t \tag{3}$$

となる。初期条件から

$$y(0)=a+c=0, \qquad \dot{y}(0)=3b+d=3 \tag{4}$$

となる。一方(1) を(2) に代入して

$$y''-6x+7y=0 \tag{5}$$

となる。(1) より

$$\ddot{x}(0)=(-3x(0)+2y(0))=0$$

であり、(5) より

$$\ddot{y}(0)=6x(0)-7y(0)=0.$$

(1) を微分して

$$\dddot{x}(0)=-3\dot{x}(0)+2\dot{y}(0)=3$$

であり、(2) を微分して

$$\dddot{y}(0)=-\dddot{x}(0)+(3\dot{x}(0)-5\dot{y}(0))=-3+(3-15)=-15.$$

(3) を微分し上の初期値に関する条件から

$$\ddot{y}(0)=(-9a\cos 3t-c\cos t)\big|_{t=0}=-9a-c=0, \quad \dddot{y}(0)=-27b-c=-15. \tag{6}$$

(4) と(6) から $a=c=0,\ b=1/2,\ d=3/2$ で

$$y(t)=\frac{3}{2}\sin t+\frac{1}{2}\sin 3t$$

となる。それと(5) を用いて

$$x(t)=\frac{3}{2}\sin t-\frac{1}{6}\sin 3t.$$

別解（藤田尭、佐竹紘彰等)：(1), (2) を書き直すと

$$\frac{d^2}{dt^2}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\mathbb{A}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}, \quad \mathbb{A}=\begin{pmatrix}-3 & 2\\ 6 & -7\end{pmatrix}$$

となる。$\det(\lambda\mathbb{I}_2 - \mathbb{A}) = \lambda^2 + 10\lambda + 9$ だから $\mathbb{A}$ の固有値は -1 と -9 である。$\mathbb{A}$ を対角化すると

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 6 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -9 \end{pmatrix}$$

となるから、

$$\frac{d^2}{dt^2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

即ち、

$$\frac{d^2}{dt^2} \begin{pmatrix} 3x+y \\ x-y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3x+y \\ x-y \end{pmatrix}$$

となる。これらを別々に解いて

$$\frac{d^2}{dt^2}(3x+y) = -(3x+y), \quad (3x+y)(0) = 0,\ (3\dot{x}+\dot{y})(0) = 6 \Longrightarrow (3x+y)(t) = 6\sin t,$$

$$\frac{d^2}{dt^2}(x-y) = -9(x-y), \quad ,(x-y)(0) = 0,\ (\dot{x}-\dot{y})(0) = -2 \Longrightarrow (x-y)(t) = -\frac{2}{3}\sin(3t),$$

となる。故に

$$x(t) = \frac{3}{2}\sin t - \frac{1}{6}\sin(3t), \quad y(t) = \frac{3}{2}\sin t + \frac{1}{2}\sin(3t).$$

注意：これについても冪級数解を想定して未定係数法で解こうとした人もいたが、計算途中で参ってしまった。しかし、Mathematica 等のソフトを使うとどうなるだろうか？「ヤレバデキルハズノコトヲ、タダヤリトゲル」ことのコンピュータの威力を実感できるかもしれない！

==

$\boxed{4}$ ２つの連続関数 $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ にたいして、不等式

$$f(t,x) < g(t,x) \quad \forall (t,x) \in \mathbb{R}^2$$

が成立しているとする。もし $\underline{x} < \underline{y}$ ならば、初期値問題

$$\dot{x} = f(t,x), \quad x(0) = \underline{x} \quad ; \quad \dot{y} = g(t,y), \quad y(0) = \underline{y}$$

の解 $x(t)$ と $y(t)$ の共通の存在範囲で、次の不等式

$$x(t) < y(t) \quad (t \geq 0)$$

が成立することを示せ。

解答例 [25] : 背理法で示す（ここがポイントだが、考えつかないと手がつかないだろう。講義中にヒントとして言う）。

$x(t) \geq y(t)$ なる時刻 t があるとすると、解は共に連続だからある時刻 $\bar{t} > 0$ があって、そこで $x(\bar{t}) = y(\bar{t})$ となる。$s = \inf\{t \mid x(t) \geq y(t)\}$ とおくと、$s > 0$ であり、時刻 $t = s$ では

$$x(s) = y(s), \quad \left.\frac{dx}{dt}(t)\right|_{t=s} \geq \left.\frac{dy}{dt}(t)\right|_{t=s}$$

となっている [20]。

実際、s の定義から任意の $\epsilon > 0$ に対し、$x(s-\epsilon) < y(s-\epsilon)$ であり、一方 $x(s) = y(s)$ だから、$(-\epsilon)^{-1}(x(s-\epsilon) - x(s)) > (-\epsilon)^{-1}(y(s-\epsilon) - y(s))$ となる。$x(t)$ も $y(t)$ も微分可能だから、$\epsilon \to 0$ として極限があって、第２式が成立する。

ところで第２式は

$$\left.\frac{dx}{dt}(t)\right|_{t=s} = f(s,x(s)) < g(s,x(s)) = g(s,y(s)) = \left.\frac{dy}{dt}(t)\right|_{t=s}$$

に矛盾する。故に、$x(t) < y(t) \quad (t \geq 0)$ である [10]。 □

注意：$f(t,x) < g(t,x)$ で $\underline{x} \leq \underline{y}$ の場合、$\epsilon > 0$ とし $y_\epsilon(t)$ を初期値を $y_\epsilon(0) = \underline{y} + \epsilon$ とした $\dot{y} = g(t,y)$ の解とする。上より $x(t) < y_\epsilon(t)$ だから、解の初期値への連続依存性から $\epsilon \to 0$ として、$x(t) \leq y(t)$ となる。

$f(t,x) \leq g(t,x)$、$\underline{x} \leq \underline{y}$ の場合, $\epsilon > 0$ とし $g_\epsilon(t,x) = g(t,x) + \epsilon$ とする。対応する解を $y_\epsilon(t)$ とすれば、

$$x(t) \leq y_\epsilon(t) \Longrightarrow x(t) \leq y(t) = \lim_{\epsilon \to 0} y_\epsilon(t).$$

ここで、微分方程式の解の、パラメタに関する連続性を用いた。 □

別解（石切山純）: 2 つの解の共通する存在区間を $[0,T)$ とし、集合

$$E = \{t \in [0,T) \mid x(t) = y(t)\}$$

を定める。$E \neq \emptyset$ と仮定して矛盾を示す。

$x(t)$ と $y(t)$ の連続性より E は閉集合であり、$t_0 = \inf E$ とすると $t_0 \in E$ である。即ち、$x(t_0) = y(t_0)$ であり、仮定より

$$f(t_0, x(t_0)) < g(t_0, y(t_0))$$

となる。$f(t,x), g(t,x), x(t), y(t)$ はそれぞれの独立変数に関し連続だから t_0 の近くの t では $f(t,x(t)) < g(t,x(t))$、即ち

$$\dot{y}(t) - \dot{x}(t) = g(t,y(t)) - f(t,x(t)) > 0$$

だから $y(t) - x(t)$ は t_0 の近くで単調増加。従って $0 < t_1 < t_0$ なる t_1 で $y(t_1) - x(t_1) < y(t_0) - x(t_0) = 0$ となる。$y(0) - x(0) = \underline{y} - \underline{x} > 0$ だから中間値の定理で $0 < t_2 < t_1$ なる t_2 で $y(t_2) - x(t_2) = 0$ となる。これは t_0 の定義に矛盾する。故に $E = \emptyset$ となる。

注意：試験直後、「連結性」の大事さが良く分かったという感想を石切山君は述べ、「それは何故だ」と藤田君、その時点では何を言っているのかな？だったのが、私の印象。しかし、道々考えていくとどうも the method of continuity もどきを考えているのではと思い到った。『ある条件を満たす集合を考え、それが、空ではなく、閉かつ開集合であれば連結性から全体に一致する。』確か、Calabi-Yau equation の解法はこの方法だったと思い出して、調べてみた。

例えば、Google で (calabi yau equation continuity method) と打ち込むと面白い情報が飛び出てくる。それに、London Junior Geometry Seminar 等をみると、彼の地での数学先進教育の充実振りに唖然ともさせられる。

試験中に背理法でというヒントを与えたが、上のような解法の裏に連結性があるのでは、と感じた感覚は素晴らしい。