NS 方程式入門第 13 回 08.01.28 講義予定 –　　井上淳　08.01.26 記

1　NS 方程式とは、どんなものなのか？

2　超関数の定義とその性質

3　Fourier 変換について

4　Sobolev 空間とその性質

5　Navier-Stokes 方程式の数学的定式化に使われる古典的な関数空間

6　Stokes 問題

7　Hopf の弱解

8　$d = 2$ の場合の特殊性

9　Kato-Fujita の mild 解

9.1　連続半群と生成作用素

9.2　分数冪 Sobolev 空間

9.3　「解」の定義について（再論）

9.4　生成作用素

9.5　非線形項の評価

9.6　逐次近似による構成

10　その後の進展

以下は、

小薗英雄, 「Navier-Stokes 方程式」, 数学,54(2002), pp.178-202.

——-, 「Navier-Stokes 方程式の解法」, 春の学校 (2005), 東北大,

等を参照した。

10.1　弱解の滑らかさ

$\mathbb{R}^3$ での弱解の構成法より、Leray は以下を主張している。

定理 10.1 (Leray1934) 初期値を $\underline{u} \in \mathbb{L}^2_\sigma(\mathbb{R}^3)$ とすると、

$$\|u(t)\|_2^2 + 2\int_s^t \|\nabla u(\tau)\|_2^2 d\tau \le \|u(s)\|_2^2 \tag{1}$$

が $s=0$ を含むほとんど至る所の $s \ge 0$ と、$s \le t$ なるすべての t に対して成立する弱解が存在する。

更に、$(0,\infty)$ に含まれる互いに交わらない可算個の区間列 $\{I_k\}_{k=0}^\infty$ で次の性質を持つものが存在する。
(i) ある $T_0 > 0$ が存在して $I_0 = [T_0, \infty)$,
(ii) $|(0,\infty) \setminus \cup_{k=0}^\infty I_k| = 0$ かつ $\sum_{k=1}^\infty |I_k|^{1/2} < \infty$,
(iii) すべての $t \in I_k,\ (k=0,1,\cdots)$ に対して、$u(\cdot,t) \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$.

「特異点集合」等の大きさを測るのに、Lebesgue 測度より細かい目盛りが必要になる。

定義 10.1 (Hausdorff 測度) X を距離空間とし、$\mathcal{O}$ でそこでの開集合族を表す。任意の $\epsilon > 0$ に対して

$$\mathcal{O}_\epsilon = \{U \in \mathcal{O} \mid \ \mathrm{diam}(U) \le \epsilon\} \cup \{\emptyset\}$$

と定める。正数 p をとり、任意の $E \subset X$ に対し

$$\mathcal{H}_{p,\epsilon}(E) = \inf\{\sum_{n=1}^\infty (\mathrm{diam}\, U_n)^p \mid U_n \in \mathcal{O}_\epsilon,\ E \subset \cup_{n=1}^\infty U_n\}$$

と定義する。但し、$\mathrm{diam}\,\emptyset = 0$ とした。こうすると
(a) ϵ が減少するとき $\mathcal{H}_{p,\epsilon}(E)$ は非減少である。そこで

$$\mathcal{H}_p(E) = \lim_{\epsilon \to +0} \mathcal{H}_{p,\epsilon}(E) \qquad \textit{for any} \quad E \subset X$$

と定義すると、
(b) $\mathcal{H}_p$ は X の外測度を成し、p-次元 *Hausdorff*（外）測度と呼ばれる。
(c) $\mathcal{H}_p(E) < \infty$ であり $q > p$ ならば、$\mathcal{H}_q(E) = 0$ となる。

この性質より任意の $E \subset X$ に対し $\dim_H(E) = \sup\{p \in \mathbb{R} \mid p > 0, \mathcal{H}_p(E) = \infty\}$ なる数を対応させ、それを E の *Hausdorff* 次元と呼ぶ。

命題 10.1 $X = \mathbb{R}$ とする。
(i) $\mathcal{H}_1(E) = |E|$=*Lebesgue* 測度,
(ii) $\emptyset \ne \forall\mathcal{O}$ とすると $\dim_H(U) = 1$,
(iii) $\dim_H(E) = 0$ ならば $|E| = 0$,
(iv) P を *Cantor* の *3* 進集合とすると、 $\dim_H P = \frac{\log 2}{\log 3}$ となる。
(v) 非可算 $E \subset \mathbb{R}$ で $\dim_H(E) = 0$ なるものが存在する。

定理 10.2 (V. Scheffer1976) u を $(0,T)$ 上の弱解で強い形のエネルギー不等式 (1) を満たすとする。このとき、$(0,T)$ に含まれる閉集合 Σ でその 1/2-次元 *Hausdorff* 測度が零であるものが存在し、

$$u(t) \in C^\infty(\mathbb{R}^3) \quad for \quad \forall t \in (0,T) \setminus \Sigma.$$

時間空間での特異点集合として

$$S = \{(x,t) \in \mathbb{R}^3 \times (0,T) \mid u \notin L^\infty(B_r(x,t)), \forall r > 0\}$$

と定める。

定理 10.3 (Caffarelli-Kohn-Nirenberg1982) u を $(0,T)$ 上の弱解で以下の「局所化されたエネルギー不等式」が任意の $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3 \times (0,T))\psi \geq 0$ に対し

$$2\int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u|^2 \psi dxdt \leq \int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} \{|u|^2(\partial_t \psi + \Delta\psi) + (|u|^2 + 2p)u\cdot\nabla\psi\}dxdt \tag{2}$$

を満たすものとする。このとき上で定義された u の特異点集合 S の 1 次元 *Hausdorff* 測度が零である。

10.2 各種関数空間での mild 解

定義 10.2 (BMO and BMO^{-1})

$$\|f\|_{BMO} = \sup_B \left(\frac{1}{|B|}\int_B |f - f_B|^2 dx\right)^{1/2} \quad with \quad f_B = \frac{1}{|B|}\int_B f(x)dx,\ B = Euclidean\ balls.$$

注意：$L^\infty \subset BMO$。しかし、任意の多項式 $p(x)$ に対し $\log|p(x)| \in BMO$ だが $\notin L^\infty$.

$$BMO^{-1} = \{f = \nabla\cdot g \mid g = (g_1, g_2, g_3),\ g_j \in BMO\} \quad with \quad \|f\|_{BMO^{-1}} = \inf_{g \in BMO}\sum_{j=1}^3 \|g_j\|_{BMO}.$$

定理 10.4 $3 < p \leq \infty$ とする。任意の $\underline{u} \in \mathbb{L}^p$ で div $= 0$ なる初期値に関して、$T = T(\|\underline{u}\|_p)$ があって、$C([0,T) : \mathbb{P}_\sigma\mathbb{L}^p)$ に属する *NS* 方程式の *mild* 解が存在する。

定理 10.5 (Koch and Tataru1996) ある定数 $\delta > 0$ があって、$\underline{u} \in BMO^{-1}$ なる任意の初期値が $\|\underline{u}\|_{BMO^{-1}} < \delta$ を満たすならば、時間大域的に *NS* 方程式の *mild* 解が存在し

$$\sqrt{t}u(t,x) \in L^\infty((0,\infty) \times \mathbb{R}^3) \quad \text{かつ} \quad \sup_{t>0, x_0 \in \mathbb{R}^3} \frac{1}{t^{3/2}}\int_{0<\tau<t}\int_{\{|x-x_0|<\sqrt{t}\}} |u(\tau,x)|^2 d\tau dx < \infty$$

を満たす。

定理 10.6 $3 < p \leq \infty$ とする。任意の $\underline{u} \in \mathbb{L}^p$ で div $= 0$ なる初期値と任意の $T > 0$ に対して以下を満たす *NS* 方程式の *mild* 解は存在したとしても高々 1 個である。

$$u(t,x) \in C([0,T) : \mathbb{P}_\sigma\mathbb{L}^p), \ \ t^{1/2(1-3/p)}u(t,x) \in C([0,T) : \mathbb{P}_\sigma\mathbb{L}^p),$$
$$\lim_{t \to 0} t^{1/2(1-3/q)}\|u(t,x)\|_p = 0.$$

定理 10.7 任意の $\underline{u} \in \mathbb{L}^3$ で div $= 0$ なる初期値と任意の $T > 0$ に対して $u(t,x) \in C([0,T) : \mathbb{P}_\sigma\mathbb{L}^3)$ なる *NS* 方程式の *mild* 解は存在したとしても高々 1 個である。

10.3 mild 解の初期値の大きさと振動

$$
\begin{cases}
\dfrac{d}{dt}(u(t), v) + \nu a(u(t), v) + b(u(t), u(t), v) = (f(t), v), \quad \forall v \in V, \\
u(0) = \underline{u}
\end{cases}
\tag{3}
$$

簡単の為に、$f = 0$ とし、上式の v として $A^{1/2}u(t)$ をぶち込んで、幾分雑に計算すると

$$
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|A^{1/4}u|^2 + \nu |A^{3/4}u|^2 = -b(u, u, A^{1/2}u) \le c_1 |A^{1/4}u||A^{3/4}u|^2
$$

となる。もし $|A^{1/4}\underline{u}| \sim |\underline{u}|_{H^{1/2}} < \nu/c_1$ ならば、$|A^{1/4}u(t)|$ は $t > 0$ で減少する。実際

$$
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|A^{1/4}u|^2 \le (c_1|A^{1/4}u| - \nu)|A^{3/4}u|^2
$$

より、もし $|A^{1/4}\underline{u}| \sim |\underline{u}|_{H^{1/2}} < \nu/c_1$ ならば、左辺は負だから $|A^{1/4}u(t)|$ は $t > 0$ で減少する。

同様に、(3) に $v = Au(t)$ を代入すると、

$$
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla u\|^2 + \nu |Au|^2 = -b(u, u, Au) \le c_1 |A^{1/4}u||Au|^2
$$

となる。同様に

$$
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla u\|^2 \le (c_1|A^{1/4}u| - \nu)|Au|^2
$$

となる。$\{w_j, \lambda_j\}$ を $Aw_j = \lambda_j w_j$ なるものとすると、$\lambda_j \to c(j)^{2/d}(j \to \infty$ は知られている。ここで初期値が $\underline{u} = \sum_{j=J}^{\infty}(\underline{u}, w_j)w_j$ なる高振動数にのみサポートをもつものとすると、$\|\nabla \underline{u}\| \ge \lambda_J^{1/4}|A^{1/4}\underline{u}|$ となる。すると、上と同じ議論で $c_1\lambda_J^{-1/4} - \nu < 0$ ならば、滑らかな解が存在する。

======================

メモ：受講者 6 名。