NS 方程式入門第 4 回 07.10.22 講義内容 –　　井上淳　10.23 記

1 NS 方程式とは、どんなものなのか？

2 超関数の定義とその性質

3 Fourier 変換について

4 Sobolev 空間とその性質

4.1 Sobolev 空間の導入

4.2 Sobolev 空間の埋蔵定理と幾つかの不等式

4.3 Layer Cake Representation

4.4 一般領域での Sobolev 空間

前回の講義録に載せたが説明しなかったところから始めよう。

少し一般化して、任意の領域 $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ 上での関数空間を考える。

定義 4.1 Ω を $\mathbb{R}^d$ の開集合とする。$1 \le p < \infty$ 及び $m = 0, 1, 2, \cdots$ に対し、$f \in W^m_{L^p}(\Omega)$（$W^{m,p}(\Omega)$, 或は $\mathcal{E}^m_{L^p}(\Omega)$ とも書く）とは $f \in L^p(\Omega)$ であり、$|\alpha| \le m$ を満たす任意の α に対し超関数の意味の微分 $\partial^\alpha f$ が $L^p(\Omega)$ に属している時をいう。また、そこでのノルムを

$$\|f\|_{m,L^p(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \le m} \|\partial^\alpha f\|_{L^p(\Omega)} \quad with \quad \|g\|^p_{L^p(\Omega)} = \int_\Omega |g(x)|^p dx$$

と定める。但し、$p = 2$ のときは $u, v \in W^m_{L^2}(\Omega)$（或は $H^m(\Omega)$ とも書く）に対して

$$(u, v)_{m,\Omega} = \sum_{|\alpha| \le m} (\partial^\alpha u, \partial^\alpha v) \quad with \quad (u, v)_{0,\Omega} = (u, v) = \int_\Omega u(x)\overline{v(x)} dx$$

と内積を与え、それからノルムを $\|u\|^2_{m,\Omega} = (u, u)_{m,\Omega}$ と定める。

また、$p = \infty$ のときは

$$\|f\|_{m,L^\infty(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \le m} \|\partial^\alpha f\|_{L^\infty(\Omega)} \quad with \quad \|g\|_{L^\infty(\Omega)} = ess.sup_{x \in \Omega} |g(x)|$$

とする。

注意：一般に $W^m_{L^p}(\Omega)$ を（$L^p(\Omega)$ での m 次）Sobolev 空間という。

命題 4.1 $W^m_{L^p}(\Omega)$ は完備である。

証明：$\{f_j\}$ を $W^m_{L^p}(\Omega)$ での Cauchy 列とする。$L^p(\Omega)$ は完備だから、任意の $\alpha(|\alpha| \leq m$ に対し $f^{(\alpha)} \in L^p(\Omega)$ があって $\partial^\alpha f_j$ は $f^{(\alpha)}$ に $L^p(\Omega)$ で収束する。特に $f_j \to f^{(0)}$ であり、$\partial^\alpha f^{(0)} = f^{(\alpha)}$ を示せば良い。これは $f_j \to f^{(0)}$ より、超関数の収束の定義から

$$\langle \partial^\alpha f_j, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle f_j, \partial^\alpha \varphi \rangle \longrightarrow (-1)^{|\alpha|} \langle f^{(0)}, \partial^\alpha \varphi \rangle = \langle \partial^\alpha f^{(0)}, \varphi \rangle$$

なることと、$L^p(\Omega)$ の完備性で保証された $f^{(\alpha)} \in L^p(\Omega)$ の存在より、

$$\langle \partial^\alpha f_j, \varphi \rangle \longrightarrow \langle f^{(\alpha)}, \varphi \rangle$$

となることより従う。　　□

上の定義で、『超関数の意味の微分 $\partial^\alpha f$ が $L^p(\Omega)$ に属している』とはどういうことか？何か不思議、或は奇妙に思わないとすると、天才的理解力があるか、或は、専門家と称する老教師が言っているのだから間違いは無いだろうと思い込んでしまった為かもしれない。勿論、超関数の定義から、$f \in C^1(\Omega)$ のとき超関数の意味の微分と普通の意味の微分とは一致することは易しい（これの証明はどうしたらよいか？）のだが。

補題 4.1 $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$ とする。このとき

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 0 \ in \ \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$$

$\Longleftrightarrow$

ある $g(x_2, \cdots, x_d) \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^{d-1})$ があって、ほとんど至る所の $x = (x_1, x_2, \cdots, x_d) \in \mathbb{R}^d$ に対し $f(x_1, x_2, \cdots, x_d) = g(x_2, \cdots, x_d)$ となることである。

ここでの用語：『ほとんど至る所の x_1-軸の平行直線』とは『$(x_2, \cdots, x_d)$-空間の測度 0 集合を除いた x_1-軸に平行な直線』のこと。

定理 4.1 (Nykodym) $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$ とする。（それが存在する点でのみ考えた）普通の意味での導関数を $\left[\frac{\partial f}{\partial x_1}\right]$ と、超関数の意味での微分を $\frac{\partial f}{\partial x_1}$ と書く。このとき、

(1) $f(x)$ がほとんど至る所の x_1-軸の平行直線上で絶対連続であるとする。すると $\left[\frac{\partial f}{\partial x_1}\right]$ が $\mathbb{R}^d$ のほとんど至る所で存在し、更に $\left[\frac{\partial f}{\partial x_1}\right] \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$ とすれば $\left[\frac{\partial f}{\partial x_1}\right] = \frac{\partial f}{\partial x_1}$ である。

(2) 逆に、導関数が $\frac{\partial f}{\partial x_1} \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$ を満たすとする。必要ならば $f(x)$ の値を測度 0 集合で補正したものを考え、それも同じ記号 $f(x)$ で書くとすると、それはほとんど至る所の x_1-軸の平行直線上で絶対連続であり、$\left[\frac{\partial f}{\partial x_1}\right] = \frac{\partial f}{\partial x_1}$ が成り立つ。

上の定理で用いられている概念と定理について。

定義 4.2 (絶対連続性) F を有界閉区間 $[a, b]$ 上で定義された有界な実数値関数とする。F が絶対連続とは、任意の $\epsilon > 0$ に対して $\delta_\epsilon > 0$ が存在して、$[a, b]$ に含まれているどの二つも交わらないような区間の有限列 $\{[a_j, b_j] \mid j = 1, \cdots, n\}$ が $\sum_{j=1}^n |b_j - a_j| < \delta_\epsilon$ を満たす限り、いつも $\sum_{j=1}^n |f(b_j) - F(a_j)| < \epsilon$ となることである。

定理 4.2 (絶対連続関数に関する Lebesgue の定理) *(I)* 区間 $[a,b]$ で定義された有界関数 F が絶対連続である為の必要十分条件は、$(a,b]$ で *Lebesgue* 積分可能な関数 f が存在して

$$F(x)-F(a)=\int_a^x f(y)d\mu(y) \quad (\mu \text{ は } Lebesgue \text{ 測度}). \tag{4.1}$$

が成立することである。

(II) 区間 $[a,b]$ で F が絶対連続とすると、μ-*a.e.* $x\in[a,b]$ に対して有界な極限値

$$F'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}$$

が存在して $f(x)$ に等しい。

定義 4.3 $C_0^\infty(\Omega)$ の $W_{L^p}^m(\Omega)$ での閉包を $\overset{\circ}{W}{}_{L^p}^m(\Omega)$（$\overset{\circ}{W}{}^{m,p}(\Omega)$, 或は $\mathcal{D}_{L^p}^m(\Omega)$）と書く。特に $p=2$ のときは $\overset{\circ}{H}{}^m(\Omega)$ 或は $H_0^m(\Omega)$ とも書く。

定義 4.4 $a\in\mathcal{B}^m(\Omega)$ とは $a\in C^m(\Omega)$ であり、任意の $|\alpha|\le m$ に対して $\partial^\alpha a$ が Ω 上で有界なることを言う。この空間には

$$|a|_m=\sum_{|\alpha|\le m}\sup_{x\in\Omega}|\partial^\alpha a(x)|$$

なるノルムが与えられる。$\mathcal{B}^\infty(\Omega)=\cap_{m=0}^\infty\mathcal{B}^m(\Omega)$ とし可算個のセミノルム $p_m(a)=|a|_m$ を定めておく。

命題 4.2 $f\in W_{L^p}^m(\Omega)$ とする。*(i)* $a\in\mathcal{B}^m(\Omega)$ に対し

$$\mathcal{B}^m(\Omega)\times W_{L^p}^m(\Omega)\ni(a,f)\to af\in W_{L^p}^m(\Omega)$$

は連続である。即ち、

$$\|af\|_{m,L^p(\Omega)}\le C|a|_m\|f\|_{m,L^p(\Omega)}.$$

(ii) $\|\partial_{x_j}f\|_{m-1,L^p(\Omega)}\le C\|f\|_{m,L^p(\Omega)}$.
(iii) $\rho_\epsilon * f\to f$ *in* $W_{L^p}^m(\mathbb{R}^d)$.

$$\rho_\epsilon * f(x)=\epsilon^{-d}\int\rho(\frac{x-y}{\epsilon})f(y)dy$$

ここで

$$\rho(x)=\begin{cases}C\exp\left[-(1-|x|^2)^{-1}\right], & (|x|<1)\\ 0 & (|x|\ge 0)\end{cases}\quad with\quad \int\rho(x)dx=1.$$

$p=2$ の時は Hilbert 空間で、Riesz の定理を用いることができるので、少し復習しておこう。

定理 4.3 (Riesz の定理) H を *Hilbert* 空間とし、*Hilbert* 空間 H 上の連続汎関数の空間（H の共役空間）を H' とする。$u\in H'$ に対し $g\in H$ が一意的に存在して、任意の $f\in H$ に対し

$$\langle u,f\rangle=(f,g)$$

が成立する。更に、

$$\|u\|_{H'}=\|g\|,\quad \|u\|_{H'}=\sup_{\|f\|\le 1}|\langle u,f\rangle|.$$

問題：$H^s(\mathbb{R}^d)$ は Hilbert 空間なので上の定理によりそれの共役空間は $H^s(\mathbb{R}^d)$ と同一視できる。一方、$H^{-s}(\mathbb{R}^d)$ も $H^s(\mathbb{R}^d)$ と同一視できることを調べ、「同一視」の仕方を明示せよ。

命題 4.3 $\{f_j\}$ を *Hilbert* 空間 H での弱収束列とする（弱 *Cauchy* 列とする）。
(i) $\|f_j\|$ は有界である。*(ii)* $\{f_j\}$ は H の任意のコンパクト集合 A 上で一様収束する。即ち、

$$\sup_{g \in H} \big|(f_p - f_q, g)\big| \to 0 \quad for \quad (p, q \to \infty).$$

(iii) 一意的に定まる H の元 f があって、任意の $g \in H$ に対して $\lim_{j\to\infty}(f_j - f, g) = 0$ となる。
(iv) $\|f\| \leq \liminf_{j\to\infty} \|f_j\|$.

問題：上の命題を証明せよ（関数解析の復習を兼ねて、Baire のカテゴリー論法参照）。

定理 4.4 (Hilbert 空間の有界集合は弱コンパクト) *Hilbert* 空間 H の有界集合 B の任意の点列 $\{f_j\}$ に対し、適当な部分列をとれば弱収束する。

問題：少し一般化して回帰的 (reflexive)Banach 空間での有界集合も弱コンパクトなることが証明できる。講義中にも述べたが、回帰的 Banach 空間には semi-inner product と呼ばれる Hilbert 空間での内積に対応するものが定義できる。これらを調べ証明を与えよ。

4.5 $W^m_{L^p}(\Omega)$ の共役空間について

定理 4.5 ($\mathcal{D}'^m_{L^2}(\Omega)$ の表現定理) $\mathcal{D}^m_{L^2}(\Omega)$ の共役空間 *(dual space)* を $\mathcal{D}'^m_{L^2}(\Omega)$ と書く。$T \in \mathcal{D}'^m_{L^2}(\Omega)$ ならば、$f_\alpha \in L^2(\Omega)$ があって

$$T = \sum_{|\alpha| \leq m} \partial^\alpha f_\alpha(x)$$

と表現できる。逆に $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ が上の表示を持つならば $\mathcal{D}'^m_{L^2}(\Omega)$ である。更に

$$\|T\|_{\mathcal{D}'^m_{L^2}(\Omega)} = \big(\sum_{|\alpha| \leq m} \|f_\alpha\|^2_{L^2(\Omega)} \big)\|^{1/2}.$$

注意：上の定理の証明には $\mathcal{D}(\Omega)$ が $\mathcal{D}^m_{L^2}(\Omega)$ で稠密なることを用いる。故に、$\mathcal{E}^m_{L^2}(\Omega)$ に対しては同様の定理は成立しない。実際、$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid |x|^2 < 1\}$ とし $\partial\Omega = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid |x|^2 = 1\}$ とする。$\varphi(x) \in \mathcal{E}^1_{L^2}(\Omega)$ に対して $\phi(s) = \varphi(x)\big|_{x=s\in\partial\Omega}$ が定義できて

$$\phi(s) \in L^2(\partial\Omega), \;\; \|\phi\|_{L^2(\partial\Omega)} \leq c\|\varphi\|_{\mathcal{E}^1_{L^2}(\Omega)}$$

を満たす。$\mu(s) \in C(\partial\Omega)$ を任意にとり

$$T : \varphi(x) \in \mathcal{E}^1_{L^2}(\Omega) \to \int_{\partial\Omega} \phi(s)\mu(s)ds$$

と定義すると、これは $\mathcal{E}^m_{L^2}(\Omega)$ 上の連続汎関数を与えるが、明らかに上の表現定理は成立していない。

問題：何故「明らかに上の表現定理は成立していない」と言えるのか？

命題 4.4 $\mathcal{D}^m_{L^p}(\mathbb{R}^d)$ の共役空間 $\mathcal{D}'^m_{L^p}(\mathbb{R}^d)$ は $\mathcal{D}^{-m}_{L^q}(\mathbb{R}^d)$ $(1/p + 1/q = 1)$ と同型である。

4.6 より一般の Sobolev 埋め込みについて

前に述べた Sobolev 埋め込み $\dot{H}^s(\mathbb{R}^d) \subset L^p(\mathbb{R}^d)$ $(p = \frac{2d}{d-2s})$ の一般領域版を、L^2 だけでなく L^p についても述べておこう。

定義 4.5 (cone property) 原点を頂点とし開き角 θ の有限な錐とは

$$K_{\theta,r} = \{x \in \mathbb{R}^d \mid x \neq 0,\ 0 < x_d < |x|\cos\theta\} \cap \{x \in \mathbb{R}^d \mid x \neq 0,\ |x| < r\}$$

とする。$\mathbb{R}^d$ の領域 Ω が錐条件を満たすとは、ある固定した有限な錐 $K_{\theta,r}$ で、任意の $x \in \Omega$ に対して $K_{\theta,r}$ と合同 *(congruent)* な K_x で x を頂点とし Ω に含まれるものが存在することとする。

定理 4.6 ($W^m_{L^p}(\Omega)$ での Sobolev 不等式) $\mathbb{R}^d$ の領域 Ω がある θ と $r > 0$ に関する錐条件を満たすとする。$1 \le p \le q,\ m \ge 1,\ k \le m$ とするとき、m, k, q, p, θ, r には依るが Ω と f には依らないある定数 C があって、任意の $f \in W^m_{L^p}(\Omega)$ に対し以下が成立する：

$$kp < d \Longrightarrow \|f\|_{W^{m-k}_{L^q}(\Omega)} \le C\|f\|_{W^m_{L^p}(\Omega)} \quad \mathit{for} \quad p \le q \le \frac{dp}{d-kp}, \tag{4.2}$$

$$kp = d \Longrightarrow \|f\|_{W^{m-k}_{L^q}(\Omega)} \le C\|f\|_{W^m_{L^p}(\Omega)} \quad \mathit{for} \quad p \le q < \infty, \tag{4.3}$$

$$kp > d \Longrightarrow \max_{0 \le |\alpha| \le m-k} \sup_{x\in\Omega} \left|\partial^\alpha f(x)\right| \le C\|f\|_{W^m_{L^p}(\Omega)}. \tag{4.4}$$

定理 4.7 (Rellich-Kondrashov Theorem) $\mathbb{R}^d$ の領域 Ω がある θ と $r > 0$ に関する錐条件を満たすとする。関数列 $\{f_n\} \subset W^m_{L^p}(\Omega)$ が $f \in W^m_{L^p}(\Omega)$ に弱収束しているとする。$1 \le p < \infty$ かつ $m \ge 1$ とし、$q \ge 1$ と $1 \le k \le m$ を固定する。このとき、任意の有界開集合 $\omega \subset \Omega$ をとると、以下が成立する：

$$kp < d \Longrightarrow \lim_{j\to\infty} \|f_j - f\|_{W^{m-k}_{L^q}(\omega)} = 0 \quad \mathit{for} \quad q < \frac{dp}{d-kp}, \tag{4.5}$$

$$kp = d \Longrightarrow \lim_{j\to\infty} \|f_j - f\|_{W^{m-k}_{L^q}(\omega)} = 0 \quad \mathit{for} \quad q < \infty, \tag{4.6}$$

$$kp > d \Longrightarrow \lim_{j\to\infty} \Big(\max_{0 \le |\alpha| \le m-k} \sup_{x\in\Omega} \left|\partial^\alpha (f_j - f)(x)\right| \Big) = 0. \tag{4.7}$$

特に、$d = 2, 3,\ p = 2$ かつ $m = 1$ の場合、

$$\dot{H}^1(\mathbb{R}^3) \subset L^6(\mathbb{R}^3), \quad \dot{H}^1(\mathbb{R}^2) \subset L^q(\mathbb{R}^3) \quad \text{for} \quad q < \infty,$$

$\Omega \subset \mathbb{R}^d$ を有界領域で錐条件を満たしているとすると、以下の埋め込みは（点列）コンパクトである：任意の有界数列から収束する部分列を取り出せる。

$$\begin{aligned} d = 3, &\quad H^1(\Omega) \subset L^q(\Omega) \quad \text{for} \quad q < 6, \\ d = 2, &\quad H^1(\Omega) \subset L^q(\Omega) \quad \text{for} \quad q < \infty. \end{aligned}$$

文献：錐条件を満たす Sobolev 空間については以下を参照せよ：

R.A. Adams, *Sobolev Spaces*, Academic Press, New York, 1975.

S. Agmon, *lecures on Elliptic Boundary Value Problems*, Van Nostrand, Princeton, 1965.

問題：以下を思い出し示せ。初期値問題

$$\frac{d}{dt}u(t) = f(t, u(t)), \quad u(0) = \underline{u}.$$

に対し、関数列

$$u_0(t) = \underline{u}, \quad u_n(t) = \underline{u} + \int_0^t f(s, u_{n-1}(s))ds$$

を定義でき、それが Cauchy 列になる一つの十分条件は $f(t,u)$ が Lipschitz 連続である。このとき、ある T があり、contraction 定理で一意的な解が $C[0,T)$ で求まった。それに反し、もし $f(t,u)$ が連続だけならば上の逐次近似解はそのままでは収束するかどうか分からない。そこで折れ線近似し、Ascoli-Arzela のコンパクト定理を用い、適当に収束する部分列を作り解の存在を示す。故に一意性は保証されない。

=====================

メモ：受講者 5 名。