「微分積分学第 2B」中間試験解答例　2007 年度 1 類 M 組

2007.11.15.　井上淳

[1] 以下の微分方程式を解け。

$$(i)\ \ y' + y\sin x = y^2 \sin 2x, \quad (ii)\ \ xy^2 y' = x^3 + y^3$$

(i) y^{-2} を両辺に掛け、変数変換 $z = y^{-1}$ を用いると

$$y^{-2}y' + y^{-1}\sin x = \sin 2x \Longrightarrow -z' + z\sin x = \sin 2x$$

となり、z に関する 1 階線形微分方程式を解く事になる。斉次方程式の解は $z_0(x) = Ce^{-\cos x}$ だから、定数変化法 $z(x) = C(x)e^{-\cos x}$ で

$$C'(x) = -\sin 2x\, e^{\cos x} = -2\sin x\, \cos x\, e^{\cos x}$$

を求めれば良い。$u = \cos x$ と変数変換して $u' = -\sin x$ より

$$-2\int \sin x\, \cos x\, e^{\cos x} dx = 2\int ue^u du = 2(u-1)e^u\big|_{u=\cos x} = 2(1-\cos x)e^{\cos x}$$

となる。故に

$$z(x) = Ce^{-\cos x} + 2(1-\cos x) \quad より \quad y(x) = (z(x))^{-1} = \frac{e^{\cos x}}{C + 2(1-\cos x)e^{\cos x}}.$$

(ii) $z = y/x$ とおき $y' = z + xz'$ を用いると

$$xz^2 z' = 1 \Longrightarrow (z^3/3)' = 1/x$$

$$y = x\sqrt[3]{3\log x + C}.$$

注意：微分方程式の一般解の表示を求められた時は、任意定数がどこに表れるか、はっきりさせることが要求される。それは、「初期時刻」での「初期値」を特定するときに必要となるからであるが、ここではこれ以上は言及しない。

[2] 変数変換、部分積分等を用いて、以下の定積分、不定積分を求めよ。

$$(i)\ \ I_{m,n} = \int_a^b (x-a)^m (b-x)^n dx, \quad (ii)\ \ \int \frac{1}{x(\log x)(\log\log x)}\, dx, \quad (iii)\ \ \int \frac{x}{(x-a)\sqrt{x+b}} dx.$$

(i) $\dfrac{d(x-a)^{m+1}}{dx} = (m+1)(x-a)^m$ を用い部分積分して

$$\begin{aligned}
I_{m,n} &= \frac{1}{m+1}\frac{d(x-a)^{m+1}}{dx}(b-x)^n dx \\
&= \frac{1}{m+1}[(x-a)^{m+1}(b-x)^n]_{x=a}^b + \frac{n}{m+1}\int_a^b (x-a)^{m+1}(b-x)^{n+1} dx \\
&= \frac{n}{m+1} I_{m+1,n-1} = \frac{n(n-1)}{(m+1)(m+2)} I_{m+2,n-2} = \cdots.
\end{aligned}$$

故に、

$$I_{m,n} = \frac{m!n!}{(m+n)!}(b-a)^{m+n+1}.$$

(ii) $y=\log x$ とおくと $dy/dx=1/x$、更に $z=\log y$ として

$$\int \frac{1}{x(\log x)(\log\log x)}\,dx=\int \frac{1}{y\log y}dy=\int \frac{1}{z}dz=\log\log y=\log\log\log x+C.$$

(iii) $y=\sqrt{x+b}$ と変換すると $y^2=x+b$ より $2ydy/dx=1$ で

$$\begin{aligned}
\int \frac{x}{(x-a)\sqrt{x+b}}dx &= \int \frac{y^2-b}{(y^2-b-a)y}2ydy=2\int(1+\frac{a}{y^2-a-b})dy\\
&=\begin{cases} 2y+\frac{2a}{\sqrt{|a+b|}}\arctan\frac{t}{\sqrt{|a+b|}} & (A=-a-b>0),\\ 2y+2by^{-1} & (A=-a-b=0),\\ 2y+\frac{a}{\sqrt{a+b}}\log\frac{t-\sqrt{a+b}}{t+\sqrt{a+b}} & (A=-a-b<0),\end{cases}\\
&=\begin{cases} 2\sqrt{x+b}+\frac{2a}{\sqrt{|a+b|}}\arctan\frac{\sqrt{x+b}}{\sqrt{|a+b|}} & (A=-a-b>0),\\ 2\sqrt{x+b}+\frac{2b}{\sqrt{x+b}} & (A=-a-b=0),\\ 2\sqrt{x+b}+\frac{a}{\sqrt{a+b}}\log\frac{\sqrt{x+b}-\sqrt{a+b}}{\sqrt{x+b}+\sqrt{a+b}} & (A=-a-b<0).\end{cases}
\end{aligned}$$

注意：(iii) で、定数のずれ（定数を足す）は省略して書いたが、混乱は起こらないであろう。