「微分積分学第 2B」期末試験及び配点 2007 年度 1 類 M 組

2008.02.08. H121, 13.20-16:20 井上淳

答案用紙は 5 枚綴り、表紙（計算用紙）1 枚、すべて提出して下さい。時間は十分ありますから、まず計算用紙で計算しよく整理してから答案を作成して下さい。もし必要ならばその旨を明記し答案用紙の裏を用いて下さい。

試験時間は 3 時間程。講義・演習についての批判・意見等歓迎します（2 月 13 日までに e-mail でのものが好ましい）。この批判・意見等はどんなものであっても名前は明かさずに公表され、講義等への貢献とされボーダーライン以下の成績を引き上げる役割を果たすことがあります。

予告問題の解答は君が理解し記憶しているもののみを利用し、事前に何かに記してきたものを参照しないこと。巷でカンニングと称されることは禁じ手。

注意：「値を求めよ」とは計算過程を明示し、値を書き上げる事である。結果（例えば数値）のみが書かれているものについては、零点とする。

この問題のヒントの最後に述べた定理は証明なしに引用して良い。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

$\boxed{1}$ a を $|a| \neq 1$ なる実数とし、$f(a) = \displaystyle\int_0^\pi \log(1 - 2a\cos x + a^2)dx$ と定める。

(1)[10] $2f(a) = f(a) + f(-a) = f(a^2)$ を示せ。

(2)[5] $|a| < 1$ なるとき、$f(a)$ を求めよ。

(3)[5] $|a| > 1$ なるとき、 $f(a)$ を求めよ。

$\boxed{2}$ 以下の積分値を求めよ。

(a)[5] $I_1 = \displaystyle\iint_D xe^{-xy}dxdy,$ ここで $D = \{(x, y) \mid |0 \leq x \leq 1, x \leq y\},$

(b)[5] [予告問題] $I_2 = \displaystyle\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+2xy+3y^2)}dxdy,$

(c)[5] $I_3 = \displaystyle\iint_D (x-y)^2\sqrt{1-(x+y)^2}dxdy,$ ここで $D = \{(x, y) \mid |x+y| \leq 1,\ |x-y| \leq 1\}.$

$\boxed{3}$ 関数項級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{n^2x}{1+n^3x^2} - \frac{(n+1)^2x}{1+(n+1)^3x^2}\right]$ について以下を証明せよ。

(i)[5] 極限関数は連続である。 (ii)[5]$[0, 1]$ で一様収束しない。

(iii)[5] 項別積分可能である。 (iv)[5] 項別微分可能ではない。

注意：『連続関数列の一様極限関数は連続である』は正しい命題だが、上の問題は「一様収束ではないが連続関数列の極限関数が連続になることもある」を例示している。

$\boxed{4}$ (4-1)[10] [予告問題] $\dfrac{d^n}{dx^n}e^{-x^2} = (-1)^n H_n(x)e^{-x^2}$ と $H_n(x)$ を定義すると、H_n は n 次多項式であり

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_m(x)H_n(x)e^{-x^2}dx = \begin{cases} 0 & (m \neq n), \\ 2^n n!\sqrt{\pi} & (m = n) \end{cases}$$

となることを示せ。

(4-2) [15] f が $[a,b]$ $(-\infty < a < b < \infty)$ 上の連続関数のとき、関数 $g(x) = \displaystyle\int_a^b f(y)\exp\left(-(x-y)^2\right)dy$ は $x = 0$ で Taylor 展開できることを証明せよ。

$\boxed{5}$ [10] [予告問題] $\alpha > 0$ とするとき以下の（広義）重積分

$$\iint_D (x^2 + 2y^2)^{-\alpha} dxdy, \quad D = \{(x,y) \mid 0 < 3x^2 + 4y^2 < 1\}$$

が収束するための α に関する必要十分条件を求めよ。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

ヒント：基本的な関数の原始関数 (右辺の関数を微分したものが左辺の被積分関数となる) のリスト

$$\int x^\alpha dx = \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1} \quad (\alpha \neq -1), \quad \int \frac{dx}{x} = \log|x|,$$
$$\int e^x dx = e^x, \quad \int a^x dx = \frac{a^x}{\log a} \quad (a > 0,\, a \neq 1), \quad \int \log|x| dx = x\log|x| - x,$$
$$\int \sin(ax+b)dx = -\frac{1}{a}\cos(ax+b) \quad (a \neq 0), \quad \int \cos(ax+b)dx = \frac{1}{a}\sin(ax+b) \quad (a \neq 0),$$
$$\int \sec^2(ax+b)dx = \frac{1}{a}\tan(ax+b) \quad (a \neq 0), \quad \int \tan(ax+b)dx = -\frac{1}{a}\log|\cos(ax+b)| \quad (a \neq 0),$$
$$\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\log\left|\frac{x-a}{x+a}\right| \quad (a \neq 0), \quad \int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} \quad (a \neq 0), \quad \int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} \quad (a \neq 0),$$
$$\int \sqrt{a^2-x^2}dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{a^2-x^2} + a^2\arcsin\frac{x}{a}\right) \quad (a > 0),$$
$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+A}}\,dx = \log|x + \sqrt{x^2+A}| \quad (A \neq 0),$$
$$\int \sqrt{x^2+A}\,dx = \frac{1}{2}(x\sqrt{x^2+A} + A\log|x + \sqrt{x^2+A}|) \quad (A \neq 0).$$

定理 0.1 (積分操作と極限操作の可換性保証の十分条件) A を $\mathbb{R}^n$ 上の体積確定の有界閉集合、I を任意の 1 次元区間とし、$K = A \times I$ とおく。$f(x,t)$ を K 上の連続関数とすると、以下が成立する；

(1) $F(t) = \displaystyle\int_A f(x,t)dx$ は I 上連続である。

(2) 更に $\partial f/\partial t$ が K 上連続ならば、F は I 上 C^1-級で $F'(t) = \displaystyle\int_A \frac{\partial f(x,t)}{\partial t}dx$ が成立つ。