「微分積分学第 2B」期末試験略解と講評等 2007 年度 1 類 M 組

2008.02.14 井上淳

試験場での感想：開始後 2 時間程して出来具合を聞くと多くの諸君ができないというので、少しヒントを出した。5 に対して楕円型の領域を変数変換で円にする方法、3 での極限関数の意味、について説明した。

尚、試験直後にこの略解を載せる予定であったが取りやめた。受験した諸君への救済措置の一環として、この問題についての解答を自分で考えレポートとして 12 日昼までに数学事務室に提出することとした。

予告問題をやってみたが分からなかった人、4 時半までの試験は決まっていたのにそれ以上の重要な用件があるという理由で退席する人、そういう学生諸君にはびっくりした。私には「やってみる」ということが、「漫画を読むように何かを見る」と解釈しているのではないかと思える。名目上での「学生の本分」としても、大きく変わってしまったのかもしれない。予告問題も解けていない人が多いのには驚いた。

講評：確かに出来が悪かったが、感想文では
「難しかったですが、試験の難易度はあれで丁度良いと思います」
「思考型と計算問題が半々で、量的にもちょうど良かったと思います。出来なかったのは、一重に自分の力量が足らなかったからです。」
「難しかったですが、試験の難易度はあれで丁度良いと思います。」
「自分の勉強不足も認めますが、あの難しさはおかしいです。学生が本当にある程度できると思ってあの問題を作ったとは思えません。予告問題以外はほとんどできませんでした。」
「このテストは何の実力をはかるためのものかを教えて下さい。少なくとも、演習の内容や J-U 問題が一切つかわれていないので、授業の定着をはかるものではありませんよね。授業の定着以外をはかるテストで単位の有無が決定されるのは誠に残念です。」
等があった。「授業の定着以外をはかるテスト」をわざわざする酔狂な教員がいると考える学生の「独走！的な考え」もほほ笑ましい。当たり前かもしれないが、「ここととここが出来なかった」と書いている人は「それなりに出来ている」ものである。

一応当該科目での教員は「権威」であるから、その権威にもの申す姿勢は大いに結構である。近年モンスターペアレントなるものが出現しているようだが、言葉に責任を持つのはかなりなことで、それが無いと一般社会では痛烈なしっぺ返しがくることは心の隅に留めておくと良い。勿論「痛烈なしっぺ返し」が理不尽なこともあるので、体力・気力も大切である。

合格状況：期末試験のみで 90 点満点中 74 点という人はいたが、中間試験 20 点との総得点 110 点とすると合格者は 20 名で極めて少ない。

まずは総得点 110 点中 70 点以上を得点した諸君の名を挙げて健闘を称えたい：

壹岐信寛、関口隆、小野達也、國友美弥子.

この採点方式では 20 名しか合格しない（この試験で、数学を勉強したかどうかを測ろうとしているのですが、80 名中 20 名でこの位の人数が少しは数学を勉強し、分かろうとした人々だろうというのは妥当なところでしょ

う。どんな集団でも 1/3 が頑張り、1/3 がそこそこに、1/3 はダラーとしているもののようです。真ん中の 1/3 が頑張る方に近いかダラーの方に近いかでその集団の「士気」が高いか低いかになるのでしょう)。

本来ならば追試験をし、少しは勉強せざるを得なくなるように配慮するのだろうが、進学振り分けもあり時間的に厳しい。そこで、$\boxed{2}$の計算問題を各 10 点とし採点し直し、救済レポートで正解していれば正規の点数の半分を与え、更に微積演習の得点の 1 割を加算し採点した。その結果で 60 点以上の者及び 50 点以上の者には点を与えて合格点とした。これで合格率は 57/80 となった。

救済レポートでこの期末試験すべてを解いてくれれば 52.5 点、中間試験平均 12 点、演習平均の 1 割の 7 点と加点すれば 60 点は越える！期末試験後 3 日間の連休があったのだが、レポート提出も多くはなかったので、受験者の 3 割程度が不合格でも仕方あるまい。

演習を受けていないが為に加点されず不合格となった者は幸いいないようだった。このような「水増し」採点をせざるを得なかったのは残念である。今学期最初に「後期試験で 100 点満点で 85 点以上取った人の前期試験での 60 点未満は取り消し 60 点と修正する」と言明したが、前期不合格で今期 85 点以上の得点者はいなかったようであるが、該当者は名乗り出て欲しい。

水増し合格者であろうがなかろうが、「よく遊び、更に遊び」ではなく「よく遊び、よく学ぶ」という学生の本分に立ち返られんことを祈る！「遊ぶ」方は簡単だろうから、たとえば天気も悪いし今日 1 日はこの教科書を読もう、それに関するノートを作ろう、とこの春休みから始められんことを！大学での勉学時間以外に、通学時間での学習（前回の講義録やノートを眺めながら）も込めてせめて 1 週間に数学に 2 時間は費やすことを！一番効率的なのは、講義直後に「講義予定」をコピーし帰りの電車で眺め、次の講義前の行きの電車で「講義録」を取り出し眺め分からなかったことを講義中でも講義後でも質問することである。<u>ノートをとることを仕事とするのではなく</u>、頭を空にして講義内容を吸収し、分からないときは質問して講義スピードを（君たちが意図的に）遅くさせながら、大体のポイントを掴む努力をすることである。

$\boxed{\text{答案返却}}$：期末試験の答案を本館 3 階数学科事務室においておきます。各自自分の答案のみを取り出し、もし採点等に疑問があったら大至急メールで私に連絡を取って下さい。[inoue@math.titech.ac.jp]

<u>返却答案の$\boxed{2}$の小問点数はそれぞれ 5 点満点のままであるが、採点ミスと勘違いしないように！</u>

$\boxed{\text{AO 合格者のその後}}$：このクラスに配された 7 名のうち 5 名のみがこの講義を受け、そのうち 2 名のみが何とか合格した。標本数が少なすぎるが、「一度精神的緊張が弛緩してしまうとなかなかやる気は復活しないものなのかもしれない」。どの分野でも構わないから「知的刺激」を何かで見つけて欲しい！本当に地球は温暖化しているのか？何時、何故餃子には毒物が混入されたか、今までの報道で推定可能であるか？チョコレートを何枚貰うのか、それは一体どういうことで左右されるのか？こんなことから考えだしても良いのである。しかしこれだと考えたことになるのかどうかはっきりしない、やっぱり数学がすっきりしているとなれば、講義録やこの解答略解をよく読んで欲しい。

新しい物事は最初が肝心でそれが期待通りいかないと、「企画倒れ」になる。「東大という大組織では真似しがたい入試方法」で東工大の入試名物になるように期待し始めたのだが、失敗例を作ってしまったのかもしれない。大いに残念である!

注意：試験の解答にも、救済レポートにも

$$\left(\int_0^1 e^{-x^2}dx\right)^2 = \int_0^1\int_0^{\pi/4} e^{-r^2} r\,dr\,d\theta = \frac{\pi}{4}\left(1-\frac{1}{e}\right),\quad \int_0^1 e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\sqrt{1-\frac{1}{e}}$$

というのがあり一見もっともらしいが、上の計算には<u>「素朴な」間違い</u>がある!

============== 以降期末試験略解 ===================

$\boxed{\text{略解}}$：まず、ヒントとして出しておいた以下の定理を書き上げておく。

定理 0.1 A を $\mathbb{R}^n$ 上の体積確定の有界閉集合、I を任意の１次元区間とし、$K = A \times I$ とおく。$f(x,t)$ を K 上の連続関数とすると、以下が成立する；

(1) $F(t) = \displaystyle\int_A f(x,t)dx$ は I 上連続である。

(2) 更に $\partial f/\partial t$ が K 上連続ならば、F は I 上 C^1-級で $F'(t) = \displaystyle\int_A \frac{\partial f(x,t)}{\partial t} dx$ が成立つ。

===

$\boxed{1}$ a を $|a| \neq 1$ なる実数とし、$f(a) = \displaystyle\int_0^\pi \log(1 - 2a\cos x + a^2)dx$ と定める。

(1)[10] $2f(a) = f(a) + f(-a) = f(a^2)$ を示せ。

(2)[5] $|a| < 1$ なるとき、$f(a)$ を求めよ。

(3)[5] $|a| > 1$ なるとき、 $f(a)$ を求めよ。

解答：(1) 簡単な計算で

$$\begin{aligned}(1 - 2a\cos x + a^2)(1 + 2a\cos x + a^2) &= (1 + a^2)^2 - 4a^2\cos^2 x \\ &= 1 + a^4 + 2a^2(1 - 2\cos^2 x) = 1 + a^4 - 2a^2\cos(2x)\end{aligned}$$

となるから、$y = 2x$ として

$$\begin{aligned}f(a) + f(-a) &= \int_0^\pi \log(1 - 2a\cos x + a^2)(1 + 2a\cos x + a^2)dx = \int_0^\pi \log(1 + a^4 - 2a^2\cos(2x))dx \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \log(1 + a^4 - 2a^2\cos y)dy = \int_0^\pi \log(1 + a^4 - 2a^2\cos y)dy = f(a^2).\end{aligned}$$

一方、$t = \pi - x$ と変数変換すると

$$\begin{aligned}f(a) = \int_0^\pi \log(1 - 2a\cos x + a^2)dx &= -\int_\pi^0 \log(1 - 2a\cos(\pi - t) + a^2)dt \\ &= \int_0^\pi \log(1 + 2a\cos t + a^2)dt = f(-a)\end{aligned}$$

だから、$2f(a) = f(a^2)$ が従う。「ポイント：２つの変数変換に気付いているか？」

(2) (1) より帰納法で $f(a) = \frac{1}{2}f(a^2) = \frac{1}{2^2}f(a^4) = \cdots = \frac{1}{2^n}f(a^{2^n})$ となる。$|a| < 1$ のとき $a^{2^n} \to 0$ であり f は $a = 0$ で連続（定理 0.1(1) を用いている）だから $f(a^{2^n}) \to f(0) = 0$。故に、$f(a) = 0$ となる。

(3) $|a| > 1$ だから $|a|^{-1} < 1$ なることを用いて、

$$\begin{aligned}f(a) &= \int_0^\pi \log(1 - 2a\cos x + a^2)dx = \int_0^\pi \log a^2(1 - \frac{2}{a}\cos x + \frac{1}{a^2})dx \\ &= 2\pi\log|a| + \int_0^\pi \log(1 - \frac{2}{a}\cos x + \frac{1}{a^2})dx = 2\pi\log|a|.\end{aligned}$$

$\boxed{2}$ 以下の積分値を求めよ。

$$(a)[10]\ I_1 = \iint_D xe^{-xy}dxdy,\ \ ここで\ \ D = \{(x,y) \mid |0 \le x \le 1, x \le y\},$$

$$(b)[10]\ [予告問題]\ I_2 = \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+2xy+3y^2)}dxdy,$$

$$(c)[10]\ I_3 = \iint_D (x-y)^2\sqrt{1-(x+y)^2}dxdy,\ \ ここで\ \ D = \{(x,y) \mid |x+y| \le 1,\ |x-y| \le 1\}.$$

解答：(a) 領域 D は有界でないので、この積分は広義の意味で考える。

$$D_R = \{(x,y) \mid |0 \le x \le 1, x \le y \le R\}$$

とし、積分範囲を図示し、Fubini の定理を用いて重積分から累次積分へ変換すると、

$$\iint_{D_R} xe^{-xy}dxdy = \int_0^1 \left(\int_x^R xe^{-xy}dy\right)dx = \int_0^1 \left[e^{-xy}\right]_{y=x}^R dx = \int_0^1 (-e^{-Rx} + e^{-x^2})dx$$
$$\to \int_0^1 e^{-x^2}dx\ \ (R \to \infty).$$

これで 10 点である。しかし、つい数値が出るものと思って計算したらしい

$$\left(\int_0^1 e^{-x^2}dx\right)^2 = \int_0^1 \int_0^{\pi/4} e^{-r^2}rdrd\theta = \frac{\pi}{4}\left(1-\frac{1}{e}\right),\quad \int_0^1 e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\sqrt{1-\frac{1}{e}}$$

という答を見ているうちに、もっともらしい計算がしてある、この計算も○と思ってしまった時間帯があった。しかし、何かおかしい。何故間違いなのか？

$$\tilde{D}_i = \{(r,\theta) \mid 0 \le r \le 1,\ 0 \le \theta \le \pi/4\} \subset D = [0,1]\times[0,1] \subset \tilde{D}_o = \{(r,\theta) \mid 0 \le r \le \sqrt{2},\ 0 \le \theta \le \pi/4\}$$

となるから、上の計算の最初の等号が間違いで

$$\left(\int_0^1 e^{-x^2}dx\right)^2 > \int_0^1 \int_0^{\pi/4} e^{-r^2}rdrd\theta = \iint_{\tilde{D}_i} e^{-r^2}rdrd\theta.$$

積分範囲を図示するということを実際にしなかったために犯した間違いである。前に講義でも指摘したが誤差関数

$$\mathrm{erf}(x) = \frac{\pi}{\sqrt{2}}\int_0^x e^{-t^2}dt$$

は 初等関数にはならない！

(b) 積分領域が非有界だから広義積分の意味である。$x^2+2xy+3y^2 = (x+y)^2+2y^2$ だから $z = x+y$ として $(x,y) \to (z,y)$ と変数変換すると

$$I_2 = \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+2xy+3y^2)}dxdy = \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(z^2+2y^2)}dzdy = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2}dz \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2y^2}dy = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

ここで $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} e^{-ax^2}dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}, (a > 0)$ を用いた。

広義積分のところを詳しく述べるとすれば以下のようになるだろう。

$$u = x+y,\ v = \sqrt{2}y,\quad x = \frac{\sqrt{2}u - v}{\sqrt{2}},\ y = \frac{v}{\sqrt{2}}$$

なる変数変換で考える「有界領域」は

$$D_R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+2xy+3y^2 \le R^2\},\quad \tilde{D}_{\tilde{R}} = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \mid\ u^2+v^2 \le \tilde{R}^2\}$$

となる。このとき Jacobian は

$$J(u,v) = \frac{(x,y)}{u,v)} = \begin{pmatrix} 1 & -2^{-1/2} \\ 0 & 2^{-1/2} \end{pmatrix} = 2^{-1/2} \big| \det J(u,v) \big| = 2^{-1/2}$$

となるので、

$$\iint_{D_R} e^{-(x^2+2xy+3y^2)} dxdy = \frac{1}{\sqrt{2}} \iint_{\tilde{D}_{\tilde{R}}} e^{-(u^2+v^2)} dudv. \to \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

ここで $R \to \infty$ のとき $\tilde{R} \to \infty$ となることを用いた。

また、2 次形式を

$$x^2 + 2xy + 3y^2 = (x,y) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

と行列に直し、それを対角化しても良い（講義中のヒントとしてそういう言い方をしたが、このような簡単な場合は上に述べた式変形を使う方が見易い。次元が高い領域での重積分のときは対角化できるならばそうした方が見やすくなることが多い)。また、「広義積分」の定義に戻って計算するということも、馴れてくれば「ほぼ気にしなくて良い」ことになる。

(c) $u = x + y$, $v = x - y$ という変数変換で D は $\tilde{D} = \{(u,v) \mid |u| \le 1,\ |v| \le 1\}$ と変換される。このとき Jacobian は 1/2 となるので

$$\begin{aligned} I_3 = \iint_D (x-y)^2 \sqrt{1-(x+y)^2} dxdy &= \frac{1}{2} \iint_{\tilde{D}} v^2 \sqrt{1-u^2} dudv \\ &= \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} v^2 dv \cdot \int_{-1}^{1} \sqrt{1-u^2} du = \frac{2}{6} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{6}. \end{aligned}$$

$\boxed{3}$ 級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{n^2 x}{1+n^3x^2} - \frac{(n+1)^2 x}{1+(n+1)^3 x^2} \right]$ について以下を証明せよ。

(i)[5] 極限関数は連続である。　　(ii)[5][0, 1] で一様収束しない。

(iii)[5] 項別積分可能である。　　(iv)[5] 項別微分可能ではない。

解答例：級数 $s = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ とは $s_N = \sum_{n=1}^{N} a_n$ が収束して $s = \lim_{N\to\infty} s_N$ となることで、このとき級数の極限 s という言い方を講義中もしてきた。しかし試験の最中に質問がでたので説明した。

(i) N を任意にとると部分和は

$$s_N(x) = \sum_{n=1}^{N} \left[\frac{n^2 x}{1+n^3x^2} - \frac{(n+1)^2 x}{1+(n+1)^3 x^2} \right] = \frac{x}{1+x^2} - \frac{(N+1)^2 x}{1+(N+1)^3 x^2}$$

となる。任意の $x \in [0,1]$ に対して $\lim_{N\to\infty} s_N(x) = s(x) = \frac{x}{1+x^2}$ となるから、極限関数 $s(x)$ は $[0,1]$ で連続である。

(ii) 一方

$$|s_N(x) - s(x)| = \frac{(N+1)^2 x}{1+(N+1)^3 x^2}$$

であり、右辺の関数は $x = (N+1)^{-3/2}$ で最大値 $\frac{\sqrt{N+1}}{2}$ をとるから、$s_N(x)$ の $s(x)$ への収束は一様収束ではない。即ち、一様収束の定義を思い出すと、任意の $\epsilon > 0$ に対し、ある数 n_0 があって、任意の $x \in [0,1]$ 及び任意の $n > n_0$ に対し

$$|s_n(x) - s(x)| \le \epsilon x \in [0,1]$$

でなければならない。ところが、上の計算で、$x_n = (n+1)^{-3/2} \in [0,1]$ で $|s_n(x) - s(x)|$ がどんどん大きくなってしまっている。

(iii) また、

$$\int_0^1 \frac{n^2 x}{1+n^3x^2}dx = \frac{1}{2n}\big[\log(1+n^3x^2)\big]_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{2n}\log(1+n^3)$$

だから

$$\begin{aligned}\int_0^1 s_N(x)dx &= \sum_{n=1}^{N}\left[\frac{1}{2n}\log(1+n^3) - \frac{1}{2(n+1)}\log(1+(n+1)^3)\right] \\ &= \frac{1}{2}\log\,2 - \frac{1}{2(N+1)}\log(1+(N+1)^3) \to \frac{1}{2}\log\,2 = \int_0^1 s(x)dx \quad (N\to\infty).\end{aligned}$$

これは項別積分可能を意味する。

(iv) また

$$u_n(x) = \frac{n^2x}{1+n^3x^2} - \frac{(n+1)^2x}{1+(n+1)^3x^2} \quad \text{とおくと} \quad u_n'(0) = n^2-(n+1)^2 = -(2n+1)$$

となるから

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n'(0) = -\infty \quad \text{だが} \quad s'(0) = 1.$$

これは項別微分できないことを意味する。「ポイント：(ii) と (iv) では何を示せば証明できたことになるのか？。「すべての星は赤い」という命題の否定は「ほらあの星は黄色いでしょう」で十分で、勿論「ほら緑でしょう」でも構わない。」

==

正に「数学的思考」：『連続関数列の一様極限関数は連続である』は正しい命題だが、上の問題は「一様収束ではないが連続関数列の極限関数が連続になることもある」を例示している。このような場合、個々の例について収束した関数が連続かどうか確かめなければならない。

「定理」というのは前提として「より多く起こり得ること」を想定し、それに対しての推論を一括して成し遂げ「結論を明示する」ことである。こうしないと一々の例についてくどくどと同じような推論を繰り返すことになる！(例えば、「収束する数列の任意の部分列は同じ極限に収束する」のだが、この定理以前には「この数列は収束し、偶数番目も同じ値に収束するなー、奇数番目を取るとどうだろう」と考えた？)。

しかし、「上記の定理」における前提、「一様収束する」の部分、が無い場合は、実際に極限関数が連続にならないものがあることは、講義中にも示した。これは、そういう例を示すこと無しに「自らおいた前提の汎用性」とそれに基づく「推論の正当性」を主張しにくいことになるからである。また、「定理」における前提が崩れているときは、「崩れ方に」色々な場合があるので、別の形の定理として前提を書きにくいのが一般的である。それが「書ける」ようになれば、その件に関する理解が一段と深まったことになる。

$\boxed{4}$ (4-1)[10] [予告問題] $\dfrac{d^n}{dx^n}e^{-x^2} = (-1)^n H_n(x)e^{-x^2}$ と $H_n(x)$ を定義すると、H_n は n 次多項式であり

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_m(x)H_n(x)e^{-x^2}dx = \begin{cases} 0 & (m\neq n), \\ 2^n n!\sqrt{\pi} & (m=n) \end{cases}$$

なることを示せ。

(4-2)[15] f が $[a,b]$ $(-\infty < a < b < \infty)$ 上の連続関数のとき、関数 $g(x) = \int_a^b f(y) \exp(-(x-y)^2) dy$ は $x=0$ で Taylor 展開できることを証明せよ。

解答例：(i) $H_1(x) = 2x$ なることと、$H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - H_n'(x)$ より H_n は n 次多項式なることは（帰納法を用いて）易しく示される。また部分積分して

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^m H_n(x) e^{-x^2} dx = \int_{-\infty}^{\infty} x^m (-1)^n (e^{-x^2})^{(n)} dx = \begin{cases} 0 & (m < n), \\ 2^n n! \sqrt{\pi} & (m = n). \end{cases}$$

感想：この問題は教科書として採用した吹田-新保「微分積分学」p127 問 13、Hermite 多項式と書いてあったにもかかわらず、「やってみたが分からなかった」という諸君には驚かされた。大学生協の微積分教科書や演習書のコーナーで立ち読みすることもしなかったのだろうか？

(ii) $f(y)(-2(x-y)\exp(-(x-y)^2))$ は y に関して積分可能だから、定理 0.1 より微分と積分の交換ができて

$$\frac{d}{dx} g(x) = \frac{d}{dx} \int_a^b f(y) \exp(-(x-y)^2) dy = \int_a^b f(y) \frac{\partial}{\partial x} \exp(-(x-y)^2) dy$$

となる。更に、極限と積分の交換ができて

$$g'(0) = \lim_{x \to 0} g'(x) = \int_a^b f(y) 2y e^{-y^2} dy.$$

また

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^n \exp(-(x-y)^2) \Big|_{x=0} = (-1)^n \left(\frac{\partial}{\partial y} \right)^n \exp(-y^2)$$

だから、同様に $f(y) H_n(x-y) \exp(-(x-y)^2))$ は y に関して積分可能で

$$g^{(n)}(x) = \frac{d^n}{dx^n} \int_a^b f(y) \exp(-(x-y)^2) dy = \int_a^b f(y) \frac{\partial^n}{\partial x^n} \exp(-(x-y)^2) dy$$

となる。これより g は C^∞-関数なることが分る。更に、極限と積分の交換ができて

$$g^{(n)}(0) = \int_a^b f(y) (-1)^n H_n(y) e^{-y^2} dy$$

となる。故に

$$R_{N+1}(x) = g(x) - \sum_{n=0}^{N} \frac{g^{(n)}(0)}{n!} x^n = \frac{1}{(N+1)!} \int_a^b f(y) H_{N+1}(\theta x - y) e^{-(\theta x - y)^2} dy,$$

とおくとき、任意の x に対して

$$\lim_{N \to \infty} |R_{N+1}(x)| = 0$$

を言えば良い。

$$\begin{aligned}
&\left| \int_a^b f(y) H_{N+1}(\theta x - y) e^{-(\theta x - y)^2} dy \right| \\
&\le (\sup |f|) \int_{-\infty}^{\infty} |H_{N+1}((\theta x - y))| e^{-(\theta x - y)^2} dy \quad \text{に変数変換 } y - \theta x \to y \\
&= (\sup |f|) \int_{-\infty}^{\infty} |H_{N+1}(y)| e^{-y^2} dy \quad \text{に Schwarz の不等式} \\
&\le (\sup |f|) \left(\int_{-\infty}^{\infty} H_{N+1}^2(y) e^{-y^2} dy \right)^{1/2} \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy \right)^{1/2} \\
&\le (\sup |f|) \sqrt{\pi} (2^{N+1} (N+1)!)^{1/2}
\end{aligned}$$

及び、$\lim_{n\to\infty} a^n/n! = 0 (a > 0)$ より

$$|R_{N+1}(x)| \leq (\sup|f|)\sqrt{\pi}\frac{1}{(N+1)!}(2^{N+1}(N+1)!)^{1/2} \to 0 \quad (N \to \infty). \qquad \square$$

注意：上に示したものより、もっとうまい方法があるはずだが、この説明を最初に書いてしまったのでそのままにしてある。

$\boxed{5}$ [10] [予告問題] $\alpha > 0$ とするとき以下の（広義）重積分

$$\iint_D (x^2+2y^2)^{-\alpha} dxdy, \quad D = \{(x,y) \mid 0 < 3x^2+4y^2 < 1\}$$

が収束するための α に関する必要十分条件を求めよ。

解答例：変数変換 $X = \sqrt{3}x,\ Y = 2y$ により D を $\tilde{D} = \{(X,Y) \mid 0 < X^2+Y^2 < 1\}$ と変換する。$X = r\cos\theta,\ Y = r\sin\theta$ と極座標変換し、$x^2+2y^2 = \frac{X^2}{3}+\frac{Y^2}{2} = r^2(\frac{\cos^2\theta}{3}+\frac{\sin^2\theta}{2})$ に注意すると、$dxdy = \frac{1}{2\sqrt{3}}dXdY$ で

$$\begin{aligned}\iint_D (x^2+2y^2)^{-\alpha} dxdy &= \frac{1}{2\sqrt{3}}\iint_{\tilde{D}} \left(\frac{X^2}{3}+\frac{Y^2}{2}\right)^{-\alpha} dXdY \\ &= \frac{1}{2\sqrt{3}}\int_0^{2\pi}\left(\frac{\cos^2\theta}{3}+\frac{\sin^2\theta}{2}\right)^{-\alpha}\left(\int_0^1 r^{1-2\alpha}dr\right)d\theta\end{aligned}$$

任意の $\alpha > 0$ で $(\frac{\cos^2\theta}{3}+\frac{\sin^2\theta}{2})^{-\alpha}$ は $[0,2\pi]$ で積分可能であり、求める条件は $r^{1-2\alpha}$ の $r=0$ 近辺での積分可能性に帰着される。故に、$\alpha < 1$ が条件である。 $\square$

注意：形式的な計算で $\displaystyle\int_0^1 r^{1-2\alpha}dr = \frac{1}{2(1-\alpha)}$ だから $\alpha \neq 1$ で収束するという解答がかなりあったが、$r^{1-2\alpha}$ があれば、3 点程度は与えた。また、$0 < \alpha < 1$ としたものもあったが、左側半分の不等式は私には見えないものとした。

$\boxed{\text{重要な注意}}$：少なくとも数学では「定義」に戻って考えることが極めて大切である。この実践は見かけよりもむずかしく、つい「気を許す」と「定義に戻って考え直す」ことの辛さを避けるようになる！だからこそ、「この試験で何を測ろうとしているのか？」という設問は大切なのである。勿論君たちが、「何故大学で勉強するのか」「そもそも就職に有利になる為と考え、点数を取りさえすれば良いと考えてはしまいか？」「分かるって何だったっけ？」等と考えることを大いに期待する。そうなれば、数学単位が取れるとか、取れなかったことは大したことではない。

ゴルフではヘッドアップが始まるとスランプになるという。何故ヘッドアップするのか？つい打った後のボールの軌道が気になるからである。しかし、打ち終わるまでしか自分が出来ることはない。その後のボールの運命は大自然が握っている、風がどう吹くか、カラスが餌と間違ってくわえる、等のことは、打ち終わってからでは如何ともしがたい。自分が精一杯やって後は他の人に判断されるということでもある。しかし、ハンドボールのアジア予選や WBC の審判の例もある。結局「日々の務めを果たせ」ということになる。何やら切ないなー！