「微分積分学第 2B」J.U.-問題 1　2007 年度 1 類 M 組 2007.10.05　配付

以下は友人の J.U. 氏が収集し、或いは作った問題であり、11 月下旬から 12 月上旬までの講義と演習で、問題として理解でき、解答ができるようになる筈の内容である。今、幾ら高校時代の知識を思い出してできないとしても、恥じることはない！各自解いて、TeX を用いてプリントアウトすると、ちょっと新しい気分になるのでは？(TeX の使用法はできるだけ早く学んでおくと得をすること受け合い。最初は面倒なので TeX ができる人達と一緒のコンピュータ室で学ぶことを勧める)

(I) 次の定積分を計算せよ。

$$(1)\quad \int_0^1 \frac{x^4}{x^2+1}dx, \qquad (2)\quad \int_0^1 x^2 \arctan x\, dx, \qquad (3)\quad \int_1^\infty \frac{dx}{x(1+x)^2},$$

$$(4)\quad \int_0^1 \frac{x^3+x^2}{x^4+5x^2+6}dx, \qquad (5)\quad \int_0^{\frac{1}{3}} \sqrt{\frac{1-3x}{1+3x}}dx, \qquad (6)\quad \int_0^1 x \arcsin x\, dx.$$

$$(7)\quad \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\tan x}{2\tan^2 x - 1}\, dx, \qquad (8)\quad \int_0^{\frac{3}{5}} \frac{dx}{(1-x)\sqrt{x^2+x+1}},$$

$$(9)\quad \int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\, dx = a \qquad \text{とおくとき、} \int_0^\infty \frac{\sin^2 x}{x^2}\, dx \qquad \text{を求めよ。}$$

$$(10)\quad \int_0^\infty \frac{dx}{1+x^3}, \qquad (11)\quad \int_0^a x\sqrt{ax-x^2}\, dx \quad (a>0).$$

(I′) 次の積分の値を求めよ。

$$(1)\quad \int_3^4 \frac{dx}{x^3-4x^2+4x}, \qquad (2)\quad \int_2^\infty \frac{x\, dx}{x^3-1}, \qquad (3)\quad \int_{\frac{5}{2}}^{\frac{10}{3}} \sqrt{\frac{x+2}{x-2}}\, dx,$$

$$(4)\quad \int_1^\infty \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}, \qquad (5)\quad \int_0^1 \frac{x \arctan x}{\sqrt{1+x^2}}dx, \qquad (6)\quad \int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{e^x+2e^{-x}+2},$$

$$(7)\quad \int_e^{e^2} \frac{(\log x+1)^2}{\log x\left\{(\log x)^2+1\right\}}\, \frac{dx}{x}, \qquad (8)\quad \int_0^\pi \frac{2-\sin x}{2+\cos x}\, dx,$$

$$(9)\quad \int_1^2 \frac{dx}{x^2(x+1)}, \qquad (10)\quad \int_0^\infty \left(\sqrt{x^2+1}-x\right)^2 dx.$$

(II) 次の微分方程式を解け。

$$(1)\quad \frac{dy}{dx} = \frac{y^2-x^2}{2xy}, \qquad (2)\quad y'+y = xy^3, \qquad (3)\quad xy' = y+\sqrt{x^2+y^2}.$$

(III) (1) $f(x)$ は $[0,\ 1]$ で単調減少で連続であるとする。また $n,\ k$ は自然数で，$k \le n$ であるとする。このとき

$$\frac{2}{n\pi} f\left(\frac{k-1}{n}\right) \ge \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(x)|\sin n\pi x| dx \ge \frac{2}{n\pi} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

が成り立つことを示せ。

(2) $\displaystyle \lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{|\sin n\pi x|}{1+x}\, dx$ を計算せよ。

(IV) 次の不定積分の漸化式を作れ。

$$I_n = \int (\log x)^n\, dx$$

(V) 次の関数の原始関数を求めよ。

$$(1)\quad (5-2x)^5, \qquad (2)\quad \frac{1}{x^3-x}, \qquad (3)\quad \frac{1}{x^4+x^3}, \qquad (4)\quad \frac{1}{\sqrt{x^2-6x+7}},$$

$$(5)\quad e^{\sqrt{x}}, \qquad (6)\quad \frac{1}{a+b\tan x}, \qquad (7)\quad x^3\sqrt{x+1}, \qquad (8)\quad \frac{1-\sin x}{\sin x\,(1-\cos x)},$$

$$(9)\quad \frac{\cos x}{\sin x(1+\cos x)}, \qquad (10)\quad \frac{\sin x}{1+\sin x+\cos x}, \qquad (11)\quad \frac{1}{a^2\cos^2 x+b^2\sin^2 x} \quad (a,b>0).$$

(VI) (1) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}$ を求めよ。

(2) 自然数 n に対して $a_n = \arcsin\frac{1}{\sqrt[n]{n}}$ とおく。

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx = \int_0^{a_n} \sin^n x\,dx + \int_{a_n}^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx$$

を用いて

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx \le \frac{1}{n}a_n + \frac{\pi}{2} - a_n$$

が成り立つことを示せ。

(3)

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx$$

の値を求めよ。

(VII) $n = 2,\ 3, \ldots$ に対して，次の不等式が成り立つことを示せ.

$$\log\left(1+\sqrt{2}\right) \le \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^n}} < 1.$$