「微分積分学第 2B」中間試験 2006 年度 6+7 類 V 組

2006.12.19. 9.00-10:30 井上淳

● 問題は 3 題、答案用紙は 3 枚綴りである。良く整理して答案を記入して欲しい。万が一紙が不足した場合は、その旨を明記し、裏にも解答して良い。

● 授業や演習に関する物言い（助言、苦情等）感想を是非記して下さい（試験後 1 週間以内に e-mail で私宛に送ってくれるのがもっとも望ましい）。それによってボーダーライン付近の点が増えることがあっても、減ることはない！

＝＝＝＝＝＝

[1] 整数 $m = 1, 2, \cdots$ に対して、実数 x の関数 $g_m(x)$ を

$$g_m(x) = \int_x^{x+\frac{\pi}{7}} (\sin\,\theta)^{2m} d\theta$$

と定める。$g_m(x)$ の最小値を a_m、最大値を b_m とするとき、極限値 $\displaystyle\lim_{m\to\infty} \frac{a_m}{b_m}$ を求めよ。

[2] 以下の（広義）積分の値を求めよ。

$$(i) \int_0^1 x^m (\log x)^n dx \ (m > -1), \qquad (ii) \int_a^b \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} \ (a < b).$$

ヒント：(i) 漸化式を考えよ。(ii) 変数変換 $t = \sqrt{(b-x)/(x-a)}$ を用いよ

[3] 次の不定積分を求めよ。

$$(i) \int \arccos(3x)\, dx, \qquad (ii) \int \frac{1}{x + 2\sqrt{x-1}}\, dx.$$

%%%

ヒント：基本的な関数の原始関数 (右辺の関数を微分したものが左辺の被積分関数となる) のリスト。

$$\int x^\alpha dx = \frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1} \quad (\alpha \neq -1), \qquad \int \frac{dx}{x} = \log|x|,$$

$$\int e^x dx = e^x, \quad \int a^x dx = \frac{a^x}{\log a} \quad (a > 0,\ a \neq 1), \quad \int \log|x| dx = x\log|x| - x,$$

$$\int \sin(ax+b) dx = -\frac{1}{a}\cos(ax+b) \quad (a \neq 0), \quad \int \cos(ax+b) dx = \frac{1}{a}\sin(ax+b) \quad (a \neq 0),$$

$$\int \sec^2(ax+b) dx = \frac{1}{a}\tan(ax+b) \quad (a \neq 0), \quad \int \tan(ax+b) dx = -\frac{1}{a}\log|\cos(ax+b)| \quad (a \neq 0),$$

$$\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\log\left|\frac{x-a}{x+a}\right| \quad (a \neq 0), \quad \int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} \quad (a \neq 0), \quad \int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} \quad (a \neq 0),$$

$$\int \sqrt{a^2-x^2} dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{a^2-x^2} + a^2 \arcsin\frac{x}{a}\right) \quad (a > 0),$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+A}} dx = \log|x + \sqrt{x^2+A}| \quad (A \neq 0),$$

$$\int \sqrt{x^2+A}\, dx = \frac{1}{2}(x\sqrt{x^2+A} + A\log|x + \sqrt{x^2+A}|) \quad (A \neq 0).$$