

## 級数と整級数

### 0.1 収束、発散 1

次の級数の収束、発散を調べよ。

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}, \quad (2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n^2}, \quad (3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}, \quad (4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{an+b} \quad (a > 0, b > 0),$$

$$(5) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \log \left(1 + \frac{1}{n}\right), \quad (6) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^\alpha}{n!}, \quad (7) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{cn+d}{an+b}\right)^n \quad (a, b, c, d > 0),$$

$$(8) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{n}, \quad (9) \sum_{n=1}^{\infty} \{\sqrt{n^\alpha+1} - \sqrt{n^\alpha-1}\} \quad (\alpha > 0)$$

### 0.2 収束・発散 2

(1)  $\alpha$  を実数とする。級数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} \log\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)$  の収束・発散を調べよ。

(2) 次の級数の収束・発散を調べよ。

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n n!}{(2n)!}, \quad (b) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\exp\left(\frac{1}{n^2}\right) - 1\right)$$

(3) 級数

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)^p}$$

は  $p > 1$  のとき収束し、 $p \leq 1$  のとき発散することを示せ。

### 0.3 整級数

(1)  $\sum_{n=0}^k x^n = \frac{x^{k+1} - 1}{x - 1}$  ( $x \neq 1$ ) を  $x$  に関して微分せよ。また  $|x| < 1$  のとき  $\sum_{n=1}^{\infty} nx^n$  が収束することを示し、その値を求めよ。(前半部分の代わりに  $\lim_{n \rightarrow \infty} nx^n = 0$  ( $|x| < 1$ ) とせよ。)

(2) 次の整級数の収束半径を求めよ。

$$(i) \sum_{n=0}^{\infty} (2^n + n)x^n, \quad (ii) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^n}$$

(3) 次の関数を  $x = 0$  を中心とする整級数に展開し、その収束半径を求めよ。

$$\frac{1}{1 - 3x + 2x^2}.$$