微分積分学第二　6+7類 V組 第13回講義内容（01月30日）　井上淳

25日昼前のラジオで良い言葉を聞いた。禅堂では

「好きなことをやるのではなく、することを好きになることを学ぶ」

とのことである。世の中で頻繁に「好きなことをやるのがよい」と言われるが、そもそも寝食を忘れる程に学びたいことがあるということは、滅多にないことであろう。いわゆる教養のための学び等は、「それを学ぶことが好きになるように自ら工夫する」ところに妙味があるのではあるまいか？

今回の講義録では、講義中には説明できなかった事も多く「講義予定」に書いたままにしてある。何を講義したかについては、受講した仲間に聞いて確かめておいて欲しい。説明を全くしなかったところからわざわざ出題しなくとも、諸君の勉学の努力は測れる！

受講者が減った事について：講義をする側の工夫も必要であるが、講義は受講者と講演者の共通の産物でもある。今学期の受講者数が40名程になってしまったということは、講演者の工夫が足らなかったということだけなのであろうか。

期末予告問題（幾分か変更される可能性有り）：

$\boxed{1}$ $D_{\epsilon,R} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, \epsilon \le \sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2} \le R\}$ とするとき $D_{\epsilon,R}$ 上の C^2-級関数 f, g に対し

$$\iint_{D_{\epsilon,R}} (f\Delta g - g\Delta f)dxdy$$

を計算せよ。（ヒント：Green の公式を求め、証明せよということ。$\tilde{f}(r,\theta) = f(r\cos\,\theta, r\sin\,\theta)$ を r と θ に関して2回偏微分して、Δf を (r,θ) で表現してみよ。この極座標変換とその微分の部分はこの講義録の最後に付録として載せておいた!）

$\boxed{2}$ $a > 0,\, c^2 - ab < 0$ とすると以下の重積分の値を求めよ。

$$\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(ax^2+2cxy+by^2)}dxdy.$$

1　積分（１変数）

2　不定積分の計算法

3　広義積分（１変数）

4　２変数関数の積分法

5　２変数での広義積分

6　級数

正項級数の収束判定：比較判定法（d’Alembert の方法、Cauchy の方法)、級数 $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$ が $s > 1$ で収束することを積分の収束性との比較による判定法で示す。

6.1 正項級数

6.2 条件収束と絶対収束

6.2.1 交項（交代）級数について

定理 6.1 (Leibnitz) 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は単調減少で、$a_n \to 0$ $(n \to \infty)$ とするならば、

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{j-1} a_j$$

は収束する。

証明（この証明は講義中には出来なかったが、気になる人は読んでおいて欲しい）：$S_{2m+2} = S_{2m} + (a_{2m+1} - a_{2m+2})$ だから、数列 $\{S_{2m}\}_{m=1}^{\infty}$ は単調増加であり、

$$S_{2m} = a_1 - (a_2 - a_3) - \cdots - (a_{2m-2} - a_{2m-1}) - a_{2m} < a_1$$

即ち、有界である。故に、$\lim_{m\to\infty} S_{2m} = S$ が存在する。また $S_{2m+1} = S_{2m} + a_{2m+1}$ かつ $a_{2m+1} \to 0$ $(m \to \infty)$ だから $\lim_{m\to\infty} S_{2m+1} = S$ でもある。これより $\lim_{m\to\infty} S_m = S$ となる。 □

$p > 1$ ならば級数 $\sum 1/n^p$ が収束性することは前に示したが、この定理より、任意の $p > 0$ に対し $\sum(-1)^{n-1}/n^p$ は収束する事が分る。この現象を、どう考えたら良いのかの結果が次の定義である。

定義 6.1 $\sum |a_n|$ が収束するとき、$\sum a_n$ は絶対収束するという。$\sum |a_n|$ は発散するが $\sum a_n$ が収束するとき、この級数は条件収束するという。

定理 6.2 絶対収束する級数は収束する。

証明：(これが示されないと「絶対収束」の名に恥じるのだが、幸いにも以下が成立する[1]。)

$$|a_n + a_{n+1} + \cdots + a_m| \le |a_n| + |a_{n+1}| + \cdots + |a_m| \quad (n \le m). \qquad \square$$

● ところで、収束する級数の値を求めるにはどうしたらよいのだろうか？

例：Taylor 展開の項で $1/(1+x) = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots$ $(-1 < x < 1)$ を示したが、これを項別積分して Abel の定理[2]を用いると

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots \quad (-1 < x \le 1)$$

が導かれる。故に、

$$\log 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}.$$

Abel の定理を使わない別の説明：$x \ne -1$ に対し等比級数の公式を用いて

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^{n-1} x^{n-1} + \frac{(-1)^n x^n}{1+x}$$

[1] これで「絶対収束」の名に恥じないと、どうして言えるのだろうか？

[2] 下に現れる級数の $x = 1$ のところでの収束性を保証している定理

となるから、$\int_0^1 x^{m-1}dx = \frac{1}{m}$ に注意し

$$\log\, 2 = \int_0^1 \frac{dx}{1+x} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} + R_n = s_n + R_n$$

を得る。これより

$$R_n = \int_0^1 \frac{(-1)^n x^n}{1+x} dx$$

だから

$$|\log\, 2 - s_n| = |R_n| = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx \le \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n} \to 0\ \ (n \to \infty).$$

注意：講義では Taylor の定理

$$f(x) = \frac{1}{1+x} = f(0) + xf'(0) + \cdots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(0) + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(\theta x) \quad 0 < \exists\theta < 1$$

を用いた。

$$f^{(j)}(0) = (-1)^j j!\ (1 \le j \le n-1), \quad f^{(n)}(\theta x) = (-1)^n n! (1+\theta x)^{-(n+1)}$$

となるので

$$\frac{1}{1+x} = 1 + x - x^2 + x^3 + \cdots + (-1)^{n-1} x^{n-1} + (-1)^n x^n (1+\theta x)^{-(n+1)}.$$

$(1+\theta x)^{-(n+1)} \le 1$ より上と同様の議論ができる。

%%%

更なる事柄：条件収束する級数

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \cdots = \log\, 2 \tag{1}$$

に 1/2 を掛けて

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \cdots = \frac{1}{2}\log\, 2.$$

この級数に 0 項を一つおきにいれても収束性は不変だから

$$0 + \frac{1}{2} + 0 - \frac{1}{4} + 0 + \frac{1}{6} + 0 - \frac{1}{8} + \cdots = \frac{1}{2}\log\, 2. \tag{2}$$

(1), (2) を各項毎に加えあわせ、0 となる項を取り除けば

$$1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \cdots = \frac{3}{2}\log\, 2.$$

問 3：より一般的に、(1) において正項を p 個加え、次に負項を q 個加えてできる級数の和は $\log\, 2 + \frac{1}{2}\log\, \frac{p}{q}$ となることを示せ。

6.2.2 条件収束級数と絶対収束級数

定理 6.3 級数 $\sum a_n$ において

$$a_n^+ = \max(a_n, 0), \quad a_n^- = -\min(a_n, 0)$$

と定義すると $a_n^+ \ge 0$、$a_n^- \ge 0$ かつ

$$a_n = a_n^+ - a_n^-, \quad |a_n| = a_n^+ + a_n^-$$

となる。
(a) $\sum a_n$ が絶対収束するとき、$\sum a_n^+$ 及び $\sum a_n^-$ がともに収束し、

$$\sum a_n = \sum a_n^+ - \sum a_n^-$$

となる。
(b) $\sum a_n$ が条件収束するとき、$\sum a_n^+$ 及び $\sum a_n^-$ がともに発散する。

証明：(a) $0 \leq a_n^\pm \leq |a_n|$ より $\sum a_n^+$ 及び $\sum a_n^-$ がともに収束、逆に、$\sum_n a_n^+$ 及び $\sum_n a_n^-$ がともに収束するならば、$|a_n| = a_n^+ + a_n^-$ より $\sum_n a_n$ が絶対収束する。

(b) $\sum_n a_n < \infty$, $\sum_n |a_n| = \infty$ を仮定し、背理法で証明する。「$\sum a_n^+$ 及び $\sum a_n^-$ がともに発散する」の否定は、「$\sum a_n^+$ か $\sum a_n^-$ の少なくも一方が収束する」である。(a) より、$\sum a_n^+$ 及び $\sum a_n^-$ がともに収束することはない。もし $\sum a_n^+ < \infty$ かつ $\sum a_n^- = \infty$ とすると、$\sum_{n=1}^N a_n = \sum_{n=1}^N a_n^+ - \sum_{n=1}^N a_n^- \to \sum a_n^+ - \infty$ となり $\sum_n a_n < \infty$ に矛盾。$\sum a_n^+ = \infty$ かつ $\sum a_n^- < \infty$ の場合も同様。 □

定理 6.4 絶対収束級数 $\sum a_n$ は、項の順序をどう変えても同じ値に収束する。

注意：「項の順序をどう変えても」という表現を、もう少し「数学的に」書いてみよう：φ を $\mathbb{N}$ から $\mathbb{N}$ の**上へ**の１対１写像[3]で、$\varphi(k) = \mu_k$ とするとき、$\sum_{k=1}^\infty a_{\mu_k}$ のことを、φ によって級数 $\sum a_n$ の項の順序を変えた級数という。このとき、

$$\sum_{n=1}^\infty a_n = \sum_{k=1}^\infty a_{\mu_k}.$$

証明：(i) まず、収束する正項級数 $\sum a_n$ について考える。各 $n \in \mathbb{N}$ に対して $m_n = \max\{\varphi(k) \mid 1 \leq k \leq n\}$ とおけば

$$\sum_{k=1}^n a_{\mu_k} \leq \sum_{k=1}^{m_n} a_k \leq \sum_{n=1}^\infty a_n.$$

故に、

$$\sum_{k=1}^\infty a_{\mu_k} \leq \sum_{n=1}^\infty a_n.$$

$\{a_n\}_{n=1}^\infty$ は φ^{-1} を用いて $\{a_{\nu_k}\}_{k=1}^\infty$ を並べ替えたものだから、上と同様にして

$$\sum_{n=1}^\infty a_n \leq \sum_{k=1}^\infty a_{\mu_k},$$

が成立する。故に、値は一致する。

(ii) $\sum a_n$ を一般の絶対収束級数とする。上の定理により a_n^+ 及び a_n^- を定めると、$\sum a_n^+$ 及び $\sum a_n^-$ は共に収束し、$\sum a_n = \sum a_n^+ - \sum a_n^-$ となる。(i) より、

$$\sum a_n^+ = \sum a_{\mu_k}^+, \quad \sum a_n^- = \sum a_{\nu_k}^-.$$

$$\sum a_{\nu_k} = \sum (a_{\nu_k}^+ - a_{\nu_k}^-) = \sum a_{\mu_k}^+ - \sum a_{\nu_k}^- = \sum a_n^+ - \sum a_n^- = \sum a_n. \quad \square$$

定義 6.2 二つの級数 $\sum_{n=0}^\infty a_n$、$\sum_{n=0}^\infty b_n$ に対し、これらの乗積級数 $\sum_{n=0}^\infty c_n$ を

$$c_n = \sum_{k+l=n} a_k b_l = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k},$$

によって定義する。

[3]似たような表現を、数列の部分列の定義でしたことを思い出そう。あのときは、$\mathbb{N}$ から $\mathbb{N}$ の**中へ**の１対１写像としたのでは。また、行列式の定義で置換という言葉が出てきたと思うが、それは有限集合 $\{1, \cdots, n\}$ から $\{1, \cdots, n\}$ への１対１写像であり、そのような写像の個数が有限だった。事の序でに、「有限集合には個数という有限な整数が対応したが、無限集合の個数はどうなるのだろうか？」と悩んで欲しい

定理 6.5 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$、$\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ が共に絶対収束する時、これらの乗積級数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ も絶対収束して次式が成立する。

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \big(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\big)\big(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\big).$$

証明：

$$\sum_{n=0}^{N} |c_n| \le \sum_{n=0}^{N} \big(\sum_{k=0}^{n} |a_k||b_{n-k}|\big) \le \big(\sum_{n=0}^{N} |a_n|\big)\big(\sum_{n=0}^{N} |b_n|\big) \le \big(\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|\big)\big(\sum_{n=0}^{\infty} |b_n|\big)$$

より $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ は絶対収束する。

$\sum a_n$、$\sum b_n$ が共に正項級数の場合、

$$\sum_{n=0}^{N} c_n \le \big(\sum_{n=0}^{N} a_n\big)\big(\sum_{n=0}^{N} b_n\big) \le \sum_{k+l\le 2N} a_k b_l = \sum_{n-0}^{2N} c_n.$$

一般の絶対収束級数の場合、$a_n = a_n^+ - a_n^-$, $b_n = b_n^+ - b_n^-$ として、正項級数の場合に帰着させれば良い。 □

6.3 関数項級数の収束

6.3.1 何故、関数項級数を考えるのか？

一つの考え方は、現象を説明するための微分方程式というものの解法として意味がある、というものである。微分方程式の冪級数による解法、未定係数法ともいう、をここで説明しておくが、講義では時間がないだろうから、この小節は読み飛ばしても構わない。

$$\frac{d^2}{dt^2}x(t) = -\omega^2 x(t),$$

に対し、その解を

$$x(t) = \sum_{n=0} a_n t^n, \quad x'(t) = \sum_{n=1} n a_n t^{n-1}, \quad x''(t) = \sum_{n=2} n(n-1) a_n t^{n-2}$$

なる形で求めてみる。即ち、形式的に代入しその係数を一致させることを考える。

$$\text{左辺の } t^n \text{ の係数} = (n+2)(n+1)a_{n+2} = a_n = \text{右辺の } t^n \text{ の係数}$$

より

$$a_n = \begin{cases} a_0/((2m)!) & (n = 2m,\ m = 0, 1, \cdots \text{の時}), \\ a_1/((2m+1)!) & (n = 2m+1,\ m = 0, 1, \cdots \text{の時}), \end{cases}$$

となる。この場合、級数 $x(t) = \sum_{n=0} a_n t^n$ の収束半径は ∞ であり、項別微分も許されるから、この冪級数が上の微分方程式の解を与えていることが示される。まだ、この方程式の『解の一意性』は示されていないこと、別の求め方で異なる解が得られる可能性があることは排除されていない。

問題：微分方程式 $\ddot{x}(t) + k\dot{x}(t) + \omega x(t) = 0$ について未定係数法で（形式的）冪級数解を求めよ。

6.3.2 関数の収束について：各点収束と一様収束

定義 6.3 区間 I で定義された関数の無限列 $f_1(x)$, $f_2(x)$,$\cdots$ を I 上の関数列という。I 上のすべての点 x で関数列 $\{f_n(x)\}$ が収束するとき、極限値 $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ は x の関数となる。これを $f(x)$ と書き、関数列 $\{f_n(x)\}$

は I 上で関数 $f(x)$ に各点収束するといい、$f(x)$ を極限関数という。論理記号を用いて書けば

$$\begin{aligned}&\text{関数列 } \{f_n(x)\} \text{ が } I \text{ 上で関数 } f(x) \text{ に } \underline{\text{各点収束}} \text{ する}\\ &\Longleftrightarrow (\forall\epsilon>0)(\forall x\in I)(\exists N\in\mathbb{N})(\forall n\in\mathbb{N})(n>N \Longrightarrow |f_n(x)-f(x)|<\epsilon).\end{aligned}$$

任意の正数 ϵ に対して、ある N をとると、

$$|f_n(x)-f(x)|<\epsilon \quad (n>N,\ x\in I)$$

が成り立つとき、関数列 $\{f_n(x)\}$ は I 上 $f(x)$ に一様収束するという。これを論理記号を用いて書けば

$$\begin{aligned}&\text{関数列 } \{f_n(x)\} \text{ が } I \text{ 上で関数 } f(x) \text{ に } \underline{\text{一様収束}} \text{ する}\\ &\Longleftrightarrow (\forall\epsilon>0)(\exists N\in\mathbb{N})(\forall n\in\mathbb{N})(\forall x\in I)(n>N \Longrightarrow |f_n(x)-f(x)|<\epsilon).\end{aligned}$$

注意：$(\exists N\in\mathbb{N})$ の位置の違い、即ち、N が何を決めた後に決まるかの違い！

講義では説明できそうもない事柄

定理 6.6 (Cauchy の判定条件) *(i)* 関数列 $\{f_n(x)\}$ は I 上 $f(x)$ に一様収束するための条件は、任意の正数 ϵ に対して、ある N をとると、

$$|f_n(x)-f_m(x)|<\epsilon \quad (n,m>N,\ x\in I) \tag{3}$$

が成立するようにとれることである。

(ii) 関数項級数 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ が I 上一様収束するための条件は、任意の正数 ϵ に対して、ある N をとると、

$$|f_n(x)+f_{n+1}(x)+\cdots+f_m(x)|<\epsilon \quad (m\geq n>N,\ x\in I)$$

が成立するようにとれることである。

証明：(i) 必要性：$f_n(x)$ が $f(x)$ に I 上一様収束したとする。任意の $\epsilon>0$ に対してある N があって

$$|f_n(x)-f(x)|<\epsilon/2 \quad (n>N,\ x\in I)$$

となる。故に、$m,n>N$ に対して

$$|f_m(x)-f_n(x)|\leq|f_m(x)-f(x)|+|f_n(x)-f(x)|<\epsilon \quad (x\in I)$$

となるから、(3) が成立する。

十分性：(3) が満たされているとする。すると、各 $x\in I$ に対し、数列 $\{f_n(x)\}$ は Cauchy 列であるから収束する。その極限関数を $f(x)$ とする。式 (3) において、$m>N$ を任意に固定して $n\to\infty$ とすると

$$|f_m(x)-f(x)|<\epsilon/2 \quad (x\in I)$$

となる。これが任意の $m>N$ に対して成立するので、$\{f_n(x)\}$ が $f(x)$ に I 上一様収束する。

(ii) は $g_n(x)=\sum_{k=1}^{n} f_k(x)$ として $\{g_n(x)\}$ に対し (i) を適用すれば良い。 □

系 6.1 (Weierstrass の M-判定法) I 上の関数項級数 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ に対して、数列 $\{M_n\}$ で

$$|f_n(x)|\leq M_n\ (n\in\mathbb{N},\ x\in I),\quad \sum_{n=1}^{\infty} M_n<\infty$$

を満たすものがあれば、$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ は I 上一様収束する。

証明：以下に注意し上記の定理 6.6(ii) を用いよ。

$$|f_n(x)+f_{n+1}(x)+\cdots+f_m(x)| \le |f_n(x)|+|f_{n+1}(x)|+\cdots+|f_m(x)| \le M_n+M_{n+1}+\cdots+M_m. \qquad \square$$

ここで、次の定理を述べておこう[4]。

定理 6.7 (Dini) 閉区間 $I=[a,b]$ 上の連続な関数列 $\{f_n(x)\}$ が I 上で単調に増加（減少）しながら $f(x)$ に収束するとする。このとき、$f(x)$ が I 上連続ならば、$f_n(x)$ は I 上一様に $f(x)$ に収束する。

6.3.3 関数項級数

定義 6.4 区間 I 上の関数列 $\{f_n(x)\}$ から作られる級数

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = f_1(x)+f_2(x)+\cdots$$

を関数項級数という。

これに対応する部分和列 $\{S_n(x)\}$

$$S_n(x) = f_1(x)+f_2(x)+\cdots+f_n(x)$$

は関数列となる。関数項級数 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ の収束、発散、一様収束を、関数列 $\{S_n(x)\}$ の収束、発散、一様収束で定義する。

定理 6.8 連続な関数列の一様収束極限は連続である。

証明：関数列 $\{f_n(x)\}$ が I 上 $f(x)$ に一様収束する時、各関数 $f_n(x)$ が I 上連続ならば、$f(x)$ は I 上連続なることを示す。

$x_0 \in I$ を固定し、$f(x)$ が $x=x_0$ で連続をいう。任意に $\epsilon>0$ をとると、ある N があって

$$|f_N(x)-f(x)|<\epsilon \quad (x\in I)$$

となる。$f_N(x)$ は $x=x_0$ で連続だから、ある $\delta>0$ があって

$$|f_N(x)-f_N(x_0)|<\epsilon \quad (|x-x_0|<\delta,\ x\in I)$$

となる。故に、$|x-x_0|<\delta$ なる $x\in I$ に対して

$$|f(x)-f(x_0)| \le |f(x)-f_N(x)|+|f_N(x)-f_N(x_0)|+|f_N(x_0)-f(x_0)| < 3\epsilon$$

となる。よって、$f(x)$ は $x=x_0$ で連続である。 $\square$

例：関数 $f_n(x)$、$f(x)$ を $I=[0,1]$ 上で以下のように定めると、「連続関数の各点収束極限は一般には連続関数ではない」という例になっている。

$$n\to\infty \text{ の時、} \qquad f_n(x)=x^n \to f(x)=\begin{cases} 0 & (x<1), \\ 1 & (x=1) \end{cases} \tag{4}$$

[4] 証明は各自試みられたし

定理 6.9 *(1)* **積分と一様極限の順序交換**：閉区間 $[a,b]$ で連続な関数列 $\{f_n\}$ が f に一様収束するならば、

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b \big[\lim_{n\to\infty} f_n(x)\big]dx = \lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)dx.$$

(2) **項別積分**：各 $f_n(x)$ は $I=[a,b]$ 上連続で $\sum f_n(x)$ が I 上一様収束しているならば

$$\int_a^b \big(\sum f_n(x)\big)dx = \sum \int_a^b f_n(x)dx$$

証明：(1) 「連続関数列の一様極限は連続」より f は I 上連続であるから I 上積分可能である。任意の $\epsilon>0$ をとると、一様収束の仮定から、ある N があって

$$|f_n(x)-f(x)|<\epsilon \quad (n>N,\ x\in I)$$

となる。故に、$n>N$ に対して

$$\left|\int_a^b f_n(x)dx - \int_a^b f(x)dx\right| = \left|\int_a^b (f_n(x)-f(x))dx\right| \le \int_a^b |f_n(x)-f(x)|dx < \epsilon(b-a)$$

となる。従って

$$\int_a^b f_n(x)dx \to \int_a^b f(x)dx \quad (n\to\infty).$$

(2) は $g_n(x)=\sum_{k=1}^n f_k(x)$ として $\{g_n(x)\}$ に対して (1) を適用せよ。 □

注意：上の定理は積分という操作と極限を取るという操作が、いつその順序を変えて計算してよいかの一つの十分条件を述べている。各点収束では一般に順序変更は許されないことは、

$$f_n(x) = \begin{cases} 3\text{ 点 } (0,0),\ (1/(2n),2n),\ (1/n,0) \text{ を結ぶ折れ線の } x \text{ での値} & (0\le x\le 1/n), \\ 0 & (1/n\le x\le 1), \end{cases} \to f(x)=0,$$

は $I=[0,1]$ 上各点収束であり（極限関数は連続だが）一様収束ではないし、

$$\int_0^1 f_n(x)dx = 1 \to \int_0^1 0dx = 0, \quad \text{即ち、} \quad \lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)dx \ne \int_0^1 (\lim_{n\to\infty} f_n(x))dx$$

から分かるだろう。

しかし、区間 $[0,1]$ 上の関数列 $f_n(x)=x^n$ の場合は各点収束にもかかわらず

$$n\to\infty \text{ の時、} \quad \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1} \to \int_0^1 f(x)dx = 0, \quad f(x) = \begin{cases} 0 & (x<1), \\ 1 & (x=1) \end{cases}$$

となるから、積分と極限の順序を変えても良いように見える。これをも、うまく説明できる理論[5]があるのだろうか？

定理 6.10 *(1)* **積分と微分の順序交換**：各 $f_n(x)$ は区間 I 上で C^1-級とする。$\{f_n'(x)\}$ が I 上一様収束するとき、$\{f_n(x)\}$ がある一点 $x_0\in I$ で収束するならば、I 上すべての点で収束し、極限関数 $f(x)$ も I 上 C^1-級である。また

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\big(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\big) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{d}{dx}f_n(x)\right). \tag{5}$$

(2) **項別微分**：各 $f_n(x)$ は区間 I 上で C^1-級とし、関数項級数 $\{\sum f_n'(x)\}$ が I 上一様収束するとする。$\{\sum f_n(x)\}$ がある一点 $x_0\in I$ で収束するならば、I 上すべての点で収束し、極限関数も I 上 C^1-級であり、

$$\frac{d}{dx}\big(\sum f_n(x)\big) = \sum \frac{d}{dx} f_n(x).$$

[5] これの一つの候補が Lebesgue 積分論と言われるものである。著者が学生時代、もっとも上位な積分理論として教えられたが、この頃は果たしてそうなのか？と疑いつつある。教える側が、新しい状況が起こりうるかどうかの先見性なく信じ過ぎるのはまずいこともありそうだ。例えば、日本がその時々の最高の文化を何の抵抗もなく受け入れ成功を収めてきた、という成功体験が「ある日、突然の転向」「鬼畜米英から Give me chocolate」へを生み出すのかもしれないのだから

証明：(1) のみ証明しよう。仮定と微分積分の基本定理より

$$f_n(x) = f_n(x_0) + \int_{x_0}^{x} f_n'(t)dt$$

が成立する。この式で $n \to \infty$ とし、定理 6.9「閉区間 $[a, b]$ で連続な関数列 $\{f_n\}$ が f に一様収束するならば、積分と極限の順序交換可能である」を用いれば

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x_0) + \lim_{n\to\infty} \int_{x_0}^{x} f_n'(t)dt = f(x_0) + \int_{x_0}^{x} (\lim_{n\to\infty} f_n'(t))dt$$

定理 6.8「連続関数列の一様極限は連続である」より $\lim_{n\to\infty} f_n'(t)$ は連続であるから、上式は、$\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ が x に関し微分可能なることを示している。即ち、(5) を意味する。 □

6.4 冪級数、収束半径、項別積分、項別微分

6.4.1 冪級数と収束半径

$\sum_n a_n x^n$ なる形の関数項級数を特に冪級数或いは整級数という。すでに、

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + \cdots$$

なることを学んだ。

定理 6.11 *(i)* 級数 $\sum_n a_n r^n$ $(r > 0)$ が収束するならば、冪級数 $\sum_n a_n x^n$ は $\{x \mid |x| < r\}$ において絶対収束し、$(-r, r)$ に含まれる任意の閉区間で一様収束である。即ち、$\sum_n a_n x^n$ は $(-r, r)$ で連続である。

(ii) 級数 $\sum_n a_n r^n$ $(r > 0)$ が発散するならば $\sum_n a_n x^n$ は $\{x \mid |x| > r\}$ において発散する。

証明：(i) $\sum_n a_n r^n$ $(r > 0)$ が収束するから、$a_n r^n \to 0 (n \to \infty)$。よって $\{a_n r^n\}$ は有界、即ち、$|a_n r^n| \leq M (n = 1, 2, \cdots)$ である。

$$|a_n x^n| = |a_n r^n||x/r|^n \leq M|x/r|^n$$

であり、$|x| < r$ とすると、$\sum_n |x/r|^n$ は収束するから、$\sum_n |a_n x^n|$ も収束する。(i) の後半部分は定理 6.8 による。(ii) も同様に示される。 □

定義 6.5 冪級数 $\sum_n a_n x^n$ が与えられると、上の定理 *6.11* により下記のいずれかが成立する：
(i) 0 以外の x については収束しない。例：$\sum_{n=0}^{\infty} n! x^n$
(ii) ある $r > 0$ があって、$|x| < r$ なる x に対しては絶対収束、$|x| > r$ なる x に対しては発散する。例：$\sum_{n=0}^{\infty} (x/r)^n$
(iii) すべての実数 x に対しては絶対収束する。例：$\sum_{n=0}^{\infty} x^n/n!$

(i), (ii), (iii) に応じて、冪級数 $\sum_n a_n x^n$ の収束半径は、それぞれ、$0, r, \infty$ であるという。また、集合 $\{x \mid |x| < r\}$ を収束円という。

注意：何故「収束半径」というのか？これは、冪級数 $\sum_n a_n z^n$ は $z \in \mathbb{C}$ に対しても定義できることは、絶対値を複素数に対しても定義できることより明らかであろう。とすると、集合 $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < r\}$ は複素平面で円の内部になる。

以下、冪級数 $\sum_n a_n x^n$ の係数 $\{a_n\}$ の性質から収束半径を計算する方法を述べる。

定理 6.12 (d'Alembert の収束半径判定法) 冪級数 $\sum_n a_n x^n$ に対し

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = r$$

ならば、その冪級数の収束半径は $1/r$ である。

証明：$\lim_{n\to\infty} |a_{n+1}x^{n+1}/a_n x^n| = r|x|$ であるから、数列に関する d'Alembert の判定法を用いて、$\sum a_n x^n$ は $r|x| < 1$ で絶対収束し、$r|x| > 1$ のときは絶対収束はしない。これから、収束半径は $1/r$ となる。 □

定理 6.13 (Cauchy-Hadamard の収束半径判定法) 冪級数 $\sum_n a_n x^n$ に対し

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = r$$

ならば、その冪級数の収束半径は $1/r$ である。

証明：$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n x^n|} = r|x|$ であるから、数列に関する Cauchy-Hadamard の判定法を用いれば、上の議論と同様に、収束半径が求まる。 □

6.4.2 冪級数の微分積分

定理 6.14 (項別微分) 冪級数 $\sum_n a_n x^n$ は、その収束半径が $r > 0$ であるとき、各項を微分した冪級数 $\sum_n n a_n x^{n-1}$ の収束半径も $r > 0$ である。収束半径内で以下が成立する。

$$\frac{d}{dx}\sum_n a_n x^n = \sum_n \frac{d}{dx} a_n x^n = \sum_n n a_n x^{n-1}.$$

証明：冪級数 $\sum_n n a_n x^{n-1}$ の収束半径を r' とする。この場合、$\sum_n n a_n x^n$ の収束半径も r' である。一方、$|a_n x^n| \le |n a_n x^n|$ だから、$r' \le r$ となる。

逆向きの関係は以下のように示す。$|x| < r$ なる任意の x を固定し、$|x| < \xi < r$ なる ξ を一つ取ると、

$$|n a_n x^n| = n|x/\xi|^n |a_n \xi^n|.$$

$|x/\xi| < 1$ だから $n|x/\xi|^n| \to 0 (n \to \infty)$、従って $\{n|x/\xi|^n\}$ は有界、$\sum |a_n \xi^n|$ の収束より $\sum |n a_n x^n|$ も収束する。よって、$|x| \le r'$。これは $|x| < r$ なる任意の x について成立するから、$r \le r'$ 故に、$r = r'$。

定理 6.11「級数 $\sum_n a_n r^n$ $(r > 0)$ が収束するならば、冪級数 $\sum_n a_n x^n$ は $\{x \mid |x| < r\}$ において絶対収束し、$(-r, r)$ に含まれる任意の閉区間で一様収束である」より、$\sum_n n a_n x^{n-1}$ は $(-r, r)$ に含まれる任意の閉区間で一様収束する。この事実と定理 6.10 より、$\sum_n a_n x^n$ を項別微分してよいことになる。 □

定理 6.15 (項別積分) 冪級数 $\sum_n a_n x^n$ は、その収束半径が $r > 0$ であるとき、$(-r, r)$ に含まれる任意の閉区間において一様収束している。更に、収束円内で以下が成立する。

$$\int_0^x \sum_n a_n t^n dt = \sum_n a_n \int_0^x t^n dt = \sum_n \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}.$$

証明：定理 6.9「各 $f_n(x)$ は $I = [a, b]$ 上連続で $\sum f_n(x)$ が I 上一様収束しているならば項別積分可能である」による。 □

定理 6.16 (Abel の定理) 冪級数 $\sum_n a_n x^n$ の収束半径を r $(0 < r < \infty)$ とする。もし、$x = r$ においてこの級数が収束するならば、収束は $[0, r]$ においても一様である。従って、和 $f(x) = \sum_n a_n x^n$ は $(-r, r]$ において連続である。故に

$$\lim_{x \to r-0} f(x) = f(r) = \sum_n a_n r^n$$

となる。また、$x = -r$ において収束する場合も同様である。

証明：上記の定理を、まず $r = 1$ とし、$x = 1$ で収束する場合に証明する。

任意の $\epsilon > 0$ をとる。仮定により $\sum a_n = f(1)$ は収束するから、ある N をとると

$$|a_n + a_{n+1} + \cdots + a_m| < \epsilon \quad (m \geq n > N)$$

となる。$n > N$ を任意に固定し、

$$\sigma_{n,k} = a_n + a_{n+1} + \cdots + a_k \quad (k \geq n)$$

とおく。このとき、$m > n$ に対して

$$\begin{aligned}
\Big|\sum_{k=n}^{m} a_k x^k\Big| &= \big|\sigma_{n,n} x^n + (\sigma_{n,n+1} - \sigma_{n,n}) x^{n+1} + \cdots + (\sigma_{n,m} - \sigma_{n,m-1}) x^m\big| \\
&= \big|\sigma_{n,n}(x^n - x^{n+1}) + \sigma_{n,n+1}(x^{n+1} - x^{n+2}) + \cdots + \sigma_{n,m-1}(x^{m-1} - x^m) + \sigma_{n,m} x^m\big| \\
&\leq \epsilon\Big(\sum_{k=n}^{m-1}(x^k - x^{k+1}) + x^m\Big) = \epsilon x^n \leq \epsilon.
\end{aligned}$$

が成立する。ここで、$|\sigma_{n,k}| < \epsilon$ かつ $x \in [0, 1]$ なることを用いた。故に、$m \geq n > N$ のとき、

$$\Big|\sum_{k=n}^{m} a_k x^k\Big| < \epsilon \quad (0 \leq x \leq 1)$$

となり、これは $\sum_n a_n x^n$ が $[0, 1]$ 上一様収束することを保証する。故に、$f(x)$ は $[0, 1]$ 上連続である。

一般の r に対しては、$x \to rx$, または、$x \to -rx$, なる変換で上記の証明に帰着させればよい。 $\square$

例 1 ：$\displaystyle\int_0^1 \frac{\log(1+t)}{t} dt = \frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} + \cdots$ なることを示せ。

$\because) f(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{\log(1+t)}{t} dt$[6] として x に関して整級数展開する。これを $x = 0$ で Taylor 展開するのではなく、被積分関数を

$$\frac{\log(1+t)}{t} = 1 - \frac{1}{2}t + \frac{1}{3}t^2 - \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} t^{n-1} + \cdots$$

と Taylor 展開[7] し、これを項別積分して

$$\int_0^x \frac{\log(1+t)}{t} dt = x - \frac{1}{2^2}x^2 + \frac{1}{3^2}x^3 - \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} x^n + \cdots$$

となる。上式右辺は $x = 1$ で収束することは Leibniz の定理で示される。そこで Abel の定理より

$$\int_0^1 \frac{\log(1+t)}{t} dt = \frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} + \cdots. \qquad \square$$

注意：実は $\displaystyle\int_0^x \frac{\log(1+t)}{t} dt = \frac{\pi^2}{12}.$

[6] この被積分関数は $t = 0$ で定義されていないので広義積分の意味
[7] $\log(1+t)$ を $t = 0$ で Taylor 展開でせよ

例２：$\displaystyle\int_0^1 \frac{\log\ x}{1-x}dx = -\left(\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}+\cdots\right)$ なることを示せ。

$\because$) $\log\ x = \log(x-1+1)$ より $x-1=t$ と変数変換して

$$\int_0^1 \frac{\log\ x}{1-x}dx = -\int_{-1}^0 \frac{\log(1+t)}{t}dt$$

となる。例１と同様にして、級数が $x=-1$ で収束していること、次に積分で $x\to -1+0$ とせよ。 $\square$

例３：級数 $1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}-\cdots+\dfrac{(-1)^{n-1}}{n}+\cdots$ の値を求めよ。

$\because$) 整級数 $x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}-\cdots+\dfrac{(-1)^{n-1}x^n}{n}+\cdots$ は $(|x|<1)$ で $\log(1+x)$ となることは既知である。一方級数は $x=1$ で収束することも既知であるから、Abel の定理より

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{n}+\cdots = \lim_{x\to 1-0}\log(1+x) = \log 2. \qquad \square$$

6.5 複素変数の冪級数

今まで、$x\in\mathbb{R}$ として冪級数 $\sum_n a_n x^n$ を考えてきた。ところで、この変数 x を複素数 $z\in\mathbb{C}$ にまで拡張した "冪級数" $\sum_n a_n z^n$ には意味が付くのだろうか？例えば、指数関数 e^x は $\sum_n \frac{1}{n!}x^n$ なる冪級数展開を持ったが、$\sum_n \frac{1}{n!}z^n$ には意味が付くのだろうか？これができないと $e^{\imath\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$ なる Euler の公式に意味がつかないのでは？

これに答えるためには、**複素数を変数とする複素数値関数に対する微積分**[8]が必要になる。ここでは、微分に関する概略を述べるにとどめよう。

$\mathbb{C}$ は $\{z=(x,y)\mid x,y\in\mathbb{R}\}$ に加減乗除を導入したもので、$z=x+iy$ と表すことは、「微分編」の付録で説明した。

$\mathbb{C}$ 上で定義された関数 $f(z)$ が $z=z_0$ で連続であるとは、任意の $\epsilon>0$ に対し、ある $\delta>0$ があって

$$|z-z_0|\le\delta \quad \text{ならば} \quad |f(z)-f(z_0)|\le\epsilon$$

となる、と定義する。

関数 $f(z)$ が $z=z_0$ で微分可能であるとは、少々雑に書くが、

$$\frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{w}\to\gamma\in\mathbb{C} \quad (|w|\to 0,\ w\in\mathbb{C}) \tag{6}$$

と定義し、$\gamma=\alpha+i\beta$ $(\alpha,\beta\in\mathbb{R})$ を $f'(z_0)$ と表記する。

これをみると、形式上、実１変数関数の連続性、微分可能性と何等変わるところがないように見えるが、はたしてそうだろうか？

$$f(z)=u(x,y)+iv(x,y), \quad u(x,y)=\Re f(z)\in\mathbb{R},\ v(x,y)=\Im f(z)\in\mathbb{R}$$

と分解する。$z=x+iy$ に対し $|z|=\sqrt{x^2+y^2}$ であったから、$z_0=x_0+iy_0$ として

$$\begin{aligned}|f(z)-f(z_0)| &= |u(x,y)+iv(x,y)-(u(x_0,y_0)+iv(x_0,y_0))|\\ &= \sqrt{(u(x,y)-u(x_0,y_0))^2+(v(x,y)-v(x_0,y_0))^2}\end{aligned}$$

だから、関数 $f(z)$ が $z=z_0$ で連続ならば、$u(x,y),v(x,y)$ は (x_0,y_0) で実２変数関数として連続である。

[8]今迄の微積分は複数個の実変数の実数値（或いは実数ベクトル値）関数に対する微積分であった

上に述べた微分可能性は

$$|f(z_0+w)-f(z_0)-\gamma w| = o(|w|) \qquad (|w|\to 0) \tag{7}$$

と書けるから、これは「微分編」で多変数関数の全微分可能性と同じ形をしていることに、気づかれただろうか。

これを、もう少し詳しく見てみよう。$w=h+ik$ $(h,k\in\mathbb{R})$ とおくと、
$\gamma w = (\alpha+i\beta)(h+ik) = (h\alpha-k\beta)+i(k\alpha+h\beta)$ だから、

$$\begin{aligned}
|f(z_0+w)-&f(z_0)-\gamma w| \\
&= |u(x_0+h,y_0+k)-u(x_0,y_0)-(h\alpha-k\beta) \\
&\qquad + i(v(x_0+h,y_0+k)-v(x_0,y_0)-(k\alpha+h\beta))| \\
&= \Big([u(x_0+h,y_0+k)-u(x_0,y_0)-(h\alpha-k\beta)]^2 \\
&\qquad + [v(x_0+h,y_0+k)-v(x_0,y_0)-(k\alpha+h\beta)]^2 \Big)^{1/2}
\end{aligned}$$

となる。だから、$(h,k)\to 0$ のとき、

$$\begin{aligned}
|u(x_0+h,y_0+k)-u(x_0,y_0)-(h\alpha-k\beta)| &= o(\sqrt{h^2+k^2}), \\
|v(x_0+h,y_0+k)-v(x_0,y_0)-(k\alpha+h\beta)| &= o(\sqrt{h^2+k^2}).
\end{aligned}$$

上の第１式より、$h=0$ として $\beta=-u_y(x_0,y_0)$、$k=0$ として $\alpha=u_x(x_0,y_0)$ が導かれる。第２式より、$\alpha=v_y(x_0,y_0)$、$\beta=v_x(x_0,y_0)$ が求まる。これより、偏微分方程式系

$$u_x = v_y, \quad u_y=-v_x \tag{8}$$

が従う。この偏微分方程式系を Cauchy-Riemann 方程式といい、これを満たす関数を解析関数という。また、

$$\frac{d}{dz}f(z) = f'(z) = \alpha+i\beta = u_x - iu_y = v_y + iv_x$$

と書いて混乱を引き起こさない。

問題：実２変数関数 $g(x,y)$ に対しては $g'(x,y)$ の意味ははっきりしない。しかし、複素変数の複素数値関数の場合の微分可能性を上のように考え、微分可能な関数のみを考えるとすれば誤解が起こらない。それは何故か？

（答え）複素数 $z=x+iy$ に対し共役複素数を $\bar{z}=x-iy$ と定めると、

$$x=\frac{z+\bar{z}}{2}, \quad y=\frac{z-\bar{z}}{2i}$$

となる。$f(z)$ は変数 $\bar{z}$ に無関係なのだから

$$\frac{d}{d\bar{z}}f(z)=0.$$

$f(z)=f(x+iy)=\tilde{f}(x,y)=f(\frac{z+\bar{z}}{2}+i\frac{z-\bar{z}}{2i})=\tilde{F}(z,\bar{z})$ とし最後の関数表示で $\bar{z}$ には無関係。そこであたかも１変数 z の関数の微分のごとく解釈して $f'(z)$ と表記する。 □

$n\in\mathbb{N}$ に対して $a_n\in\mathbb{C}$ を対応させ、これを（複素数値）数列という。この（複素数値）数列の収束等については、今まで取り扱ってきた（実数値）数列の場合と同様の事実が成立する。

定義 6.6 $a_n\in\mathbb{C}$ が $\alpha\in\mathbb{C}$ に収束するとは、任意の $\epsilon>0$ に対し、ある N があって

$$|a_n-\alpha|<\epsilon \quad (n>N).$$

$a_n \in \mathbb{C},\ z \in \mathbb{C}$ に対し、冪級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ の収束性は、実変数の場合と同様に証明されることは次の補題から推察される。

補題 6.1 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ が $z = z_0$ で収束するとする。このとき、$\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ は $\{z \mid |z| < |z_0|\}$ で絶対収束する。

特に

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n$$

は、任意の $z \in \mathbb{C}$ に対し絶対収束する。これを $\varphi(z)$ と書くことにすると、これは次の性質を持つ。

$$\frac{d}{dz}\varphi(z) = \varphi(z), \quad \varphi(z+w) = \varphi(z)\varphi(w).$$

そこで、$\varphi(0) = 1$ を仮定し、記号を流用して、$\varphi(z) = e^z$ と記すことにすると

$$e^z = e^{x+iy} = e^x \cos y + i e^x \sin y = u(x,y) + iv(x,y), \quad e^z e^w = e^{z+w}$$

等の知られた公式が導かれる[9]。

%%%%%付録：より一般的な合成関数の微分について%%%%%

● 変数変換

$$(u,v) \to (x,y): \quad x = \phi(u,v), \quad y = \psi(u,v)$$

を与え、合成関数 $g(u,v) = f(\phi(u,v), \psi(u,v))$ を考える。ϕ, ψ に関する適当な条件下で

$$\begin{aligned}
\frac{\partial g(u,v)}{\partial u} &= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}, \\
\frac{\partial g(u,v)}{\partial v} &= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}
\end{aligned}$$

となる。

● 特に応用として極座標変換を考察する。

$$(r,\theta) \to (x,y): \quad x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta, \quad r = \sqrt{x^2+y^2}, \quad 0 \le \theta \le 2\pi$$

とするとき、$\tilde{u}(r,\theta) = u(r\cos\theta, r\sin\theta)$ とおくと、

$$\begin{aligned}
\tilde{u}_r(r,\theta) = \frac{\partial \tilde{u}(r,\theta)}{\partial r} &= \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} = u_x \cos\theta + u_y \sin\theta, \\
\tilde{u}_\theta(r,\theta) = \frac{\partial \tilde{u}(r,\theta)}{\partial \theta} &= \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta} = -u_x r\sin\theta + u_y r\cos\theta
\end{aligned}$$

となる。但し、$u_x = u_x(r\cos\theta, r\sin\theta)$, $u_y = u_y(r\cos\theta, r\sin\theta)$ の意味である。

[9] ここでは、微分方程式の解の一意性をいつの間にか使っているのだが、気が付いただろうか？

更に

$$
\begin{aligned}
\tilde{u}_{rr}(r,\theta) &= \frac{\partial^2 \tilde{u}(r,\theta)}{\partial r^2} = (u_{xx}\cos\theta + u_{yx}\sin\theta)\cos\theta + (u_{xy}\cos\theta + u_{yy}\sin\theta)\sin\theta \\
&= u_{xx}\cos^2\theta + (u_{yx}+u_{xy})\sin\theta\cos\theta + u_{yy}\sin^2\theta, \\
\tilde{u}_{\theta r}(r,\theta) &= \frac{\partial^2 \tilde{u}(r,\theta)}{\partial\theta\partial r} = (-u_{xx}r\sin\theta + u_{yx}r\cos\theta)\cos\theta - u_x\sin\theta + (-u_{xy}r\sin\theta + u_{yy}r\cos\theta)\sin\theta + u_y\cos\theta \\
&= (-u_{xx}+u_{yy})r\sin\theta\cos\theta + u_{yx}r\cos^2\theta - u_{xy}r\sin^2\theta - u_x\sin\theta + u_y\cos\theta, \\
\tilde{u}_{r\theta}(r,\theta) &= \frac{\partial^2 \tilde{u}(r,\theta)}{\partial r\partial\theta} = -(u_{xx}\cos\theta + u_{yx}\sin\theta)r\sin\theta - u_x\sin\theta + (u_{xy}\cos\theta + u_{yy}\sin\theta)r\cos\theta + u_y\cos\theta \\
&= (-u_{xx}+u_{yy})r\sin\theta\cos\theta - u_{yx}r\sin^2\theta + u_{xy}r\cos^2\theta - u_x\sin\theta + u_y\cos\theta, \\
\tilde{u}_{\theta\theta}(r,\theta) &= \frac{\partial^2 \tilde{u}(r,\theta)}{\partial\theta^2} = -(-u_{xx}r\sin\theta + u_{yx}r\cos\theta)r\sin\theta + (-u_{xy}r\sin\theta + u_{yy}r\cos\theta)r\cos\theta - u_xr\cos\theta - u_yr\sin\theta \\
&= u_{xx}r^2\sin^2\theta + u_{yy}r^2\cos^2\theta - (u_{yx}+u_{xy})r^2\cos\theta\sin\theta - u_xr\cos\theta - u_yr\sin\theta,
\end{aligned}
$$

となることが示される。前と同様、$u_{xx} = u_{xx}(r\cos\theta, r\sin\theta)$, etc である。これらから、

$$
\tilde{u}_{rr}(r,\theta) + \frac{1}{r}\tilde{u}_r(r,\theta) + \frac{1}{r^2}\tilde{u}_{\theta\theta}(r,\theta) = (u_{xx}+u_{yy})(r\cos\theta, r\sin\theta),
$$

$$
\tilde{u}_r^2(r,\theta) + \frac{1}{r^2}\tilde{u}_\theta^2(r,\theta) = (u_x^2+u_y^2)(r\cos\theta, r\sin\theta).
$$

となる。

ここで、

$$
\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = \Big(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\Big)u
$$

をラプラシアン (Laplacian)、ラプラス作用素という。

次のような質問があった。

$$
\begin{aligned}
\tilde{u}_r(r,\theta) &= u_x\cos\theta + u_y\sin\theta = \Big(\cos\theta\frac{\partial}{\partial x} + \sin\theta\frac{\partial}{\partial y}\Big)u, \\
\tilde{u}_\theta(r,\theta) &= -u_xr\sin\theta + u_yr\cos\theta = \Big(-r\sin\theta\frac{\partial}{\partial x} + r\cos\theta\frac{\partial}{\partial y}\Big)u
\end{aligned}
$$

となる。そこで

$$
\begin{aligned}
\tilde{u}_{rr}(r,\theta) &= \frac{\partial^2 \tilde{u}(r,\theta)}{\partial r^2} = \Big(\cos\theta\frac{\partial}{\partial x} + \sin\theta\frac{\partial}{\partial y}\Big)^2 u = \Big(\cos\theta\frac{\partial}{\partial x} + \sin\theta\frac{\partial}{\partial y}\Big)(\cos\theta\, u_x + \sin\theta\, u_y) \\
&= \cos\theta\frac{\partial}{\partial x}(\cos\theta\, u_x + \sin\theta\, u_y) + \sin\theta\frac{\partial}{\partial y}(\cos\theta\, u_x + \sin\theta\, u_y) \\
&= u_{xx}\cos^2\theta + (u_{yx}+u_{xy})\sin\theta\cos\theta + u_{yy}\sin^2\theta, \quad \underline{\cos\theta, \sin\theta \text{ は } x, y \text{ と無関係と考えて計算して}}!
\end{aligned}
$$

と計算して良いのか？<u>正しい</u>！この時の計算過程では右辺の u は x, y の関数として計算し、最後に $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ と代入している。

この計算方法は慣れないうちは「変数をどうとっているのか混乱し」間違いやすいので、最初に述べたような計算をすることをすすめている。

%%%%%

メモ：受講者は 40 名程か？この講義録の原型は数年前の５類へのものだが、内容的には随分削らなければならなかった。これは講義中に「数学的事柄に対する知識を聞くと知らない、聞いていない」ということなので、それを説明していて、講義時間が足りなくなったのかもしれない。