

## 「微分積分学第2B」重積分と級数の問題

2006年度 6+7類 V組 2007.01. 配付

以下は J.U. 氏が収集し、或いは作った問題であり、12月中旬から 01月までの講義と演習で、問題として理解でき、解答ができるようになる筈の内容である。今、幾ら高校時代の知識を思い出してできないとしても、恥じることはない！各自解いて、TeX を用いてプリントアウトすると、ちょっと新しい気分になるのでは？ (TeX の使用法はできるだけ早く学んでおくこと受け合い。最初は面倒なので TeX ができる人達と一緒にコンピュータ室で学ぶことを勧める)

### 重積分とその応用

1. 以下の重積分を計算せよ。

$$(1) \iint_D (x+y+1)^2 dx dy, \quad D = \{(x, y) \mid 0 \leq y \leq 1-x, x \geq 0\}$$

$$(2) \iint_D \frac{dx dy}{\sqrt{1-x^2-y^2}}, \quad D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$$

$$(3) \iint_D e^{-(x^2+y^2)} dx dy, \quad D = \{(x, y) \mid x \geq 0, y \geq 0\}$$

$$(4) \iint_D \frac{x+y}{x^2+y^2} dx dy, \quad D = \{(x, y) \mid 0 \leq y \leq x \leq 1\}$$

$$(5) \iint_D \log(x^2+y^2) dx dy, \quad D = \{(x, y) \mid 1 \leq x^2+y^2 \leq 4\}$$

$$(6) \iint_{\sqrt{x}+\sqrt{y} \leq 1} x dx dy$$

$$(7) \iint_D (x-y)^2 \sqrt{1-(x+y)^2} dx dy, \quad D = \{(x, y) \mid |x+y| \leq 1, |x-y| \leq 1\}$$

2. ガンマ関数とベータ関数

ガンマ関数  $\Gamma(x)$ 、ベータ関数  $B(x, y)$  は、次式で定義された関数である。

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt \quad (x > 0), \quad B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt \quad (x > 0, y > 0)$$

ガンマ関数とベータ関数の間には、次の関係がある。

$$B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} \quad (x > 0, y > 0)$$

$$(1) B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \pi \quad \text{を証明せよ。}$$

$$(2) \Gamma(1) \quad \text{および} \quad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \quad \text{の値を求めよ。}$$

$$(3) \Gamma(x+1) = x\Gamma(x) \quad (x > 0) \quad \text{を証明せよ。}$$

$$(4) \int_0^1 \frac{x^{\frac{3}{2}}(1-x)^{-\frac{1}{2}}}{(x+1)^3} dx = \frac{\sqrt{2}}{8} B\left(\frac{5}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{3\sqrt{2}}{64} \pi \quad \text{を証明せよ。 (Hint : } \frac{2x}{x+1} = t \quad \text{とおけ)}$$

### 3. 曲面積、体積

- (1)  $a > 0$  を定数とする。円柱  $x^2 + y^2 \leq ax$  と球  $x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2$  の共通部分の体積を求めよ。
- (2)  $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$  と  $4xy = z^2$  とで囲まれる部分の体積を求めよ。
- (3)  $\sqrt{x} + \sqrt{y} = a$  と  $4xy = z^2$  とで囲まれる部分の体積が 1 となるように正の定数  $a$  を定めよ。
- (4) 空間内の図形  $V = \left\{ (x, y, z) \mid x + y \leq 1, x \geq 0, y \geq 0, 0 \leq z \leq \sqrt{2xy} \right\}$  の体積を求めよ。
- (5)  $a > 0$  を定数とする。円柱面  $x^2 + y^2 = a^2$  と 2 平面  $x + z = a, z = 0$  で囲まれた立体の体積を求めよ。

## 級数と整級数

### 1. 収束、発散 1

次の級数の収束、発散を調べよ。

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}, \quad (2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n^2}, \quad (3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}, \quad (4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{an+b} \quad (a > 0, b > 0),$$

$$(5) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \log\left(1 + \frac{1}{n}\right), \quad (6) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^\alpha}{n!}, \quad (7) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{cn+d}{an+b}\right)^n \quad (a, b, c, d > 0),$$

$$(8) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{n}, \quad (9) \sum_{n=1}^{\infty} \{\sqrt{n^\alpha+1} - \sqrt{n^\alpha-1}\} \quad (\alpha > 0)$$

$$(10) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{1+n^\alpha} \quad (\alpha > 0), \quad (11) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n}}{\sqrt{n}}, \quad (12) \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n^3+1} - \sqrt{n^3-1})$$

$$(13) \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \log\left(1 + \frac{1}{n}\right) \right\}^2, \quad (14) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \left( \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{(-1)^{n-1}}{n} \right), \quad (15) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^\alpha}{n^\beta+1}$$

$$(16) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\log(n+1))^n}$$

### 2. 収束・発散 2

(1)  $\alpha$  を実数とする。級数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} \log\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)$  の収束・発散を調べよ。

(2) 次の級数の収束・発散を調べよ。

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n n!}{(2n)!}, \quad (b) \sum_{n=1}^{\infty} \left( \exp\left(\frac{1}{n^2}\right) - 1 \right)$$

(3) 級数  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)^p}$  は  $p > 1$  のとき収束し、 $p \leq 1$  のとき発散することを示せ。

### 3. 整級数

(1)  $\sum_{n=0}^k x^n = \frac{x^{k+1} - 1}{x - 1}$  ( $x \neq 1$ ) を  $x$  に関して微分せよ。また  $|x| < 1$  のとき  $\sum_{n=1}^{\infty} nx^n$  が収束することを示し、その値を求めよ。(前半部分の代わりに  $\lim_{n \rightarrow \infty} nx^n = 0$  ( $|x| < 1$ ) とせよ。)

(2) 次の整級数の収束半径を求めよ。

(i)  $\sum_{n=0}^{\infty} (2^n + n) x^n$ ,      (ii)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^n}$

(3) 関数  $\frac{1}{1 - 3x + 2x^2}$  を  $x = 0$  を中心とする整級数に展開し、その収束半径を求めよ。