「微分積分学第 2B」期末試験解答例　2006 年度 6+7 類 V 組

2007.02.14. 13.20-16:20　井上淳

以下の人々は成績が良かったので、名前を記して称えたい：

大塚雅徳、角折なな、佐々木香枝、榊原直輝、山際創（敬称略）

配点は今回の期末試験 100 ＋中間試験 30 点の 130 点満点で、60 点以上を合格とし 100 点以上は切り捨てたた。但し、中間試験を受けられなかった者とそれの結果が極めて悪かった者に対しては、期末試験が 42 点以上あれば、約束通りと 10/7 倍して合格とした。不合格者は期末受験者総数 59 名中 8 名であった。

答案に書いてくれたり、メールによる、授業の感想や意見については、別にまとめて掲示する予定である。

答案用紙の返却は、感想文筆写後、3 月から数学事務室にて行う。

$\boxed{1}$ 以下の積分値を求めよ。

$$I=\int_1^2\left[\int_{1/x}^2 ye^{xy}dy\right]dx,\quad (\text{ヒント：積分範囲を平面上に図示し、積分順序を変更してみよ}).$$

解答例：積分範囲を図示すると

$$\{(x,y)\mid 1\le x\le 2,\ 1\le y\le 2\}\cup\{(x,y)\mid 1\le x\le 2,\ 1/2\le y\le 1,\ 1\le xy\}$$

となる。これより

$$I=\int_{1/2}^1\left[\int_{1/y}^2 ye^{xy}dx\right]dy+\int_1^2\left[\int_1^2 ye^{xy}dx\right]dy=\int_{1/2}^1\Big[e^{xy}\Big]_{x=1/y}^{x=2}dy+\int_1^2\Big[e^{xy}\Big]_{x=1}^{x=2}dy$$
$$=\int_{1/2}^1(e^{2y}-e)dy+\int_1^2(e^{2y}-e^y)dy=\frac{e^2}{2}(e^2-2).\qquad\square$$

感想：積分範囲を考えずにいきなり積分順序を変更して

$$\int_1^2\left[\int_{1/y}^2 ye^{xy}dx\right]dy$$

と計算した者がかなりいた。ヒントを読んでくれないとは、哀しい事だ。

$\boxed{2}$ 以下の累次積分の積分順序は交換できないことを示せ。

$$J=\int_0^1\left(\int_0^1\frac{x-y}{(x+y)^3}dy\right)dx,\quad (\text{ヒント：積分順序を交換する前と、後の積分値を計算してみよ}).$$

解答例：部分分数分解を用いて

$$\int_0^1\left(\int_0^1\frac{x-y}{(x+y)^3}dy\right)dx=\int_0^1\left(\frac{2x}{(x+y)^3}-\frac{x+y}{(x+y)^3}\right)dy=\left[-\frac{x}{(x+y)^2}+\frac{1}{x+y}\right]_{y=0}^1=\frac{1}{(1+x)^2}$$

となるので

$$J = \int_0^1 \frac{1}{(1+x)^2}dx = \left[-\frac{1}{1+x}\right]_0^1 = \frac{1}{2}.$$

積分順序を変えたものを同様に計算すると

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{x-y}{(x+y)^3}dx\right)dy = \int_0^1 \left[\frac{-x}{(x+y)^2}\right]_{x=0}^1 dy = \int_0^1 \frac{-1}{(1+y)^2}dy = -\frac{1}{2}.$$

この２つの値が異なるので、積分順序は変更できない！　□

感想：積分の変数を (x,y) から (y,x) へ書き換えたものとの比較で「符号が逆だから、積分順序が交換できない」という議論があった。しかし、値が 0 となることもありうるので、そういう論理ではマズイ！

$\boxed{3}$ 適当な変数変換を用いて以下の重積分の値を求めよ。

(1) $$\iint_D (2x-y)e^{3x+y}dxdy, \qquad D = \{(x,y) \mid |2x-y| \le 1,\ \ |3x+y| \le 2\}.$$

(2) $$\iint_D (x-y)^2\sqrt{1-(x+y)^2}\,dxdy, \qquad D = \big\{(x,y) \bigm| |x+y| \le 1, |x-y| \le 1\big\}.$$

(3) $$\iint_D (1+x^2+y^2)^{-2}\,dxdy, \qquad D = \{(x,y) \mid (x^2+y^2)^2 \le x^2-y^2,\ x \ge 0\}.$$

解答例：(1) $u = 2x-y,\ v = 3x+y$ とおき (x,y) について解いたものを $(x,y) = \Phi(u,v) = ((u+v)/5, (-3u+2v)/5)$ と書くと

$$J_\Phi(u,v) = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{pmatrix} 1/5 & 1/5 \\ -3/5 & 2/5 \end{pmatrix}, \quad J(u,v) = \det J_\Phi(u,v) = 1/5$$

となる。この写像 Φ^{-1} により D は $\tilde{D} = \{(u,v) \mid |u| \le 1,\ |v| \le 2\}$ (或は $\Phi(\tilde{D}) = D$) に写されるから、

$$\iint_D (2x-y)e^{3x+y}dxdy = \iint_{\tilde{D}} ue^v\frac{1}{5}dudv = \frac{1}{5}\int_{-1}^1 udu\cdot\int_{-2}^2 e^v dv = 0\cdot\frac{e^2-e^{-2}}{5} = 0.$$

(2) $u = x+y,\ v = x-y$ とし $(x,y) = \Phi(u,v) = ((u+v)/2, (u-v)/2)$ とおけば

$$J_\Phi(u,v) = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}, \quad J(u,v) = \det J_\Phi(u,v) = -1/2$$

となる。写像 Φ によって $\tilde{D} = \{(u,v) \mid |u| \le 1,\ |v| \le 1\}$ は D に写されるから、

$$\iint_D (x-y)^2\sqrt{1-(x+y)^2}\,dxdy = \iint_{\tilde{D}} v^2\sqrt{1-u^2}|J(u,v)|dudv = \frac{1}{2}\int_{-1}^1 \sqrt{1-u^2}du\cdot\int_{-1}^1 v^2dv = \frac{\pi}{6}.$$

ここで公式 $\int \sqrt{a^2-x^2}dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{a^2-x^2} + a^2\mathrm{arcsin}\frac{x}{a}\right)$ $\ (a > 0)$ を用いて、$\int_{-1}^1 \sqrt{1-u^2}du = \pi/2$。

(3) 極座標変換 $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$ すると、領域 D は $\tilde{D} = \{(r,\theta) \mid r^4 \le r^2(\cos^2\theta - \sin^2\theta),\ \cos\theta > 0\} = \{(r,\theta) \mid 0 \le r \le \sqrt{\cos 2\theta},\ -\pi/4 \le \theta \le \pi/4\}$ に変換される。故に

$$\begin{aligned}
\iint_D (1+x^2+y^2)^{-2}\,dxdy &= \iint_{\tilde{D}} (1+r^2)^{-2}rdrd\theta \\
&= \int_{-\pi/4}^{\pi/4}\left(\int_0^{\sqrt{\cos 2\theta}} \frac{rdr}{(1+r^2)^2}\right)d\theta = \int_{-\pi/4}^{\pi/4}\left(\frac{1}{2}\int_0^{\cos 2\theta}\frac{dX}{(1+X)^2}\right)d\theta \\
&= \frac{1}{2}\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\left(1 - \frac{1}{2\cos^2\theta}\right)d\theta = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}. \qquad \square
\end{aligned}$$

$\boxed{4}$ [予告問題] 以下の重積分の値を求めよ。

$$\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(2x^2+2xy+3y^2)}dxdy.$$

解答例：2 次形式を $2x^2+2xy+3y^2 = 2(x+(y/2))^2+(5/2)y^2$ と変形し (x,y) から (z,y) への変数変換を $z = x+(y/2)$ とすれば

$$\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(2z^2+(5/2)y^2)}dzdy = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2z^2}dz\cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(5/2)y^2}dy = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\cdot\sqrt{\frac{2\pi}{5}} = \frac{\pi}{\sqrt{5}}.$$

ここで $a>0$ に対して $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-az^2}dz = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$ となる事を用いた。

別解：2 次形式に対応する行列を対角化する事を考える：

$$2x^2+2xy+3y^2 = (x,y)\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$$

$$\det\begin{pmatrix}2-\lambda & 1\\ 1 & 3-\lambda\end{pmatrix} = \lambda^2-5\lambda+5 = (\lambda-\lambda_+)(\lambda-\lambda_-) = 0, \quad \lambda_\pm = \frac{5\pm\sqrt{5}}{2}.$$

この行列は対称だから、直交行列 T で対角化できる。即ち、ある θ があって

$$\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} = T\begin{pmatrix}u\\ v\end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}, \quad {}^tT\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 3\end{pmatrix}T = \begin{pmatrix}\lambda_+ & 0\\ 0 & \lambda_-\end{pmatrix} = \Lambda$$

とすると

$$(x,y)\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} = {}^t(u,v){}^tT\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 3\end{pmatrix}T\begin{pmatrix}u\\ v\end{pmatrix} = {}^t(u,v)\Lambda\begin{pmatrix}u\\ v\end{pmatrix} = \lambda_+u^2+\lambda_-v^2$$

となる。故に

$$\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(2x^2+2xy+3y^2)}dxdy = \iint_{\mathbb{R}^2} e^{\lambda_+u^2+\lambda_-v^2}dudv = \sqrt{\frac{\pi}{\lambda_+}}\sqrt{\frac{\pi}{\lambda_-}} = \frac{\pi}{\sqrt{5}}, \quad \lambda_+\lambda_- = 5. \qquad \square$$

$\boxed{5}$ [予告問題] $D_{\epsilon,R} = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid \epsilon \le \sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2} \le R\}$ とするとき $D_{\epsilon,R}$ 上の C^2-級関数 f, g に対し

$$\iint_{D_{\epsilon,R}} (f\Delta g - g\Delta f)dxdy$$

を計算せよ。（ヒント：極座標変換した $\tilde{f}(r,\theta) = f(r\cos\theta, r\sin\theta)$ を r と θ に関して 2 回偏微分せよ。Δf を (r,θ) で表現し、部分積分せよ）

解答例： 極座標変換 $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ を用いて関数 $u(x,y)$ に対し $\tilde{u}(r,\theta) = u(r\cos\theta, r\sin\theta)$ とおくと

$$\tilde{u}_{rr}(r,\theta) + \frac{1}{r}\tilde{u}_r(r,\theta) + \frac{1}{r^2}\tilde{u}_{\theta\theta}(r,\theta) = (u_{xx}+u_{yy})(r\cos\theta, r\sin\theta)$$

となることは、1 月 30 日の講義録に載せておいた。$\tilde{D}_{\epsilon,R} = \{(r,\theta) \mid \epsilon \le r \le R,\ 0 \le \theta \le 2\pi\}$ として積分記号下の変数変換公式により

$$\iint_{D_{\epsilon,R}} f(x,y)\Delta g(x,y)dxdy = \iint_{(\epsilon,R)\times(0,2\pi)} \widetilde{f}(r,\theta)\widetilde{(\Delta g)}(r,\theta)\,rdrd\theta$$

となる。重積分から累次積分に直して部分積分することを考える。

$$\iint_{\tilde{D}_{\epsilon,R}} \tilde{f}(r,\theta)\tilde{g}_{rr}(r,\theta)rdrd\theta = \int_0^{2\pi}\left(\int_\epsilon^R \tilde{f}(r,\theta)\tilde{g}_{rr}(r,\theta)rdr\right)d\theta$$

となる。ここで θ を固定して r に関して部分積分をすると

$$\int_\epsilon^R \tilde{f}(r,\theta)\tilde{g}_{rr}(r,\theta)rdr = [r\tilde{f}\partial_r\tilde{g}]\Big|_\epsilon^R - \int_\epsilon^R \partial_r(r\tilde{f})(r,\theta)\tilde{g}_r(r,\theta)\,dr$$
$$= R\tilde{f}(R,\theta)\tilde{g}_r(R,\theta) - \epsilon\tilde{f}(\epsilon,\theta)\tilde{g}_r(\epsilon,\theta) - \int_\epsilon^R \tilde{f}_r(r,\theta)\tilde{g}_r(r,\theta)rdr - \int_\epsilon^R \tilde{f}(r,\theta)\tilde{g}_r(r,\theta)\,dr,$$

故に

$$\int_\epsilon^R \tilde{f}(r,\theta)(\tilde{g}_{rr}(r,\theta) + \frac{1}{r}\tilde{g}_r(r,\theta))\,rdr = \tilde{f}(R,\theta)\tilde{g}(R,\theta) - \tilde{f}(\epsilon,\theta)\tilde{g}(\epsilon,\theta) - \int_\epsilon^R \tilde{f}_r(r,\theta)\tilde{g}_r(r,\theta)\,rdr.$$

となる。これらより

$$\iint_{D_{\epsilon,R}} f(x,y)\Delta g(x,y)dxdy = \iint_{\tilde{D}_{\epsilon,R}} \tilde{f}(r,\theta)\left(\tilde{g}_{rr}(r,\theta) + \frac{1}{r}\tilde{g}_r(r,\theta) + \frac{1}{r^2}\tilde{g}_{\theta\theta}(r,\theta)\right)rdrd\theta$$
$$= \int_0^{2\pi} r\tilde{f}(r,\theta)\tilde{g}_r(r,\theta)\Big|_\epsilon^R d\theta + \iint_{\tilde{D}_{\epsilon,R}} \tilde{f}(r,\theta)\frac{1}{r^2}\tilde{g}_{\theta\theta}(r,\theta)rdrd\theta - \iint_{\tilde{D}_{\epsilon,R}} \tilde{f}_r(r,\theta)\tilde{g}_r(r,\theta)rdrd\theta$$

また、r を固定して θ に関して部分積分をすると

$$\int_0^{2\pi} \tilde{f}(r,\theta)\tilde{g}_{\theta\theta}(r,\theta)d\theta = -\int_0^{2\pi} \tilde{f}_\theta(r,\theta)\tilde{g}_\theta(r,\theta)d\theta = \int_0^{2\pi} \tilde{f}_{\theta\theta}(r,\theta)\tilde{g}(r,\theta)d\theta$$

となる。

同様に、f と g の役割を変えて計算すると

$$\int_\epsilon^R \tilde{f}\big(\tilde{g}_{rr} + \frac{1}{r}\tilde{g}_r + \frac{1}{r^2}\tilde{g}_{\theta\theta}\big)\,rdr - \int_\epsilon^R \tilde{g}\big(\tilde{f}_{rr} + \frac{1}{r}\tilde{f}_r\frac{1}{r^2}\tilde{f}_{\theta\theta}\big)\,rdr = [r\tilde{f}\tilde{g}_r]\big|_\epsilon^R - [r\tilde{g}\tilde{f}_r]\big|_\epsilon^R. \tag{1}$$

故に、上式を θ に関して積分し、円環領域 $D_{\epsilon,R}$ の外側の境界で ∂_r は外向きの法線微分、内側の境界で $-\partial_r$ は外向きの法線微分を与えることに注意する。すると、

$$\int_0^{2\pi} R\tilde{f}(R,\theta)\frac{\partial\tilde{g}}{\partial r}(R,\theta)d\theta - \int_0^{2\pi} \epsilon\tilde{f}(\epsilon,\theta)\frac{\partial\tilde{g}}{\partial r}(\epsilon,\theta)d\theta = \int_{\partial D_{\epsilon,R}} f\frac{\partial g}{\partial n}ds. \tag{2}$$

これと (1) より

$$\begin{aligned}\iint_{D_{\epsilon,R}} (f\Delta g - g\Delta f)dxdy &= \int_0^{2\pi}\int_\epsilon^R (\tilde{f}\widetilde{(\Delta g)} - \widetilde{(\Delta f)}\tilde{g})\,rdrd\theta \\ &= \int_0^{2\pi}\left(\tilde{f}\,\frac{\partial\tilde{g}}{\partial r} - \frac{\partial\tilde{g}}{\partial r}\,\tilde{g}\right)d\theta\Big|_{r=\epsilon}^R \\ &= \int_0^{2\pi}\left(\tilde{f}(R,\theta)\frac{\partial\tilde{g}}{\partial r}(R,\theta) - \frac{\partial\tilde{g}}{\partial r}(R,\theta)\tilde{g}(R,\theta)\right)Rd\theta \\ &\qquad - \int_0^{2\pi}\left(\tilde{f}(\epsilon,\theta)\frac{\partial\tilde{g}}{\partial r}(\epsilon,\theta) - \frac{\partial\tilde{g}}{\partial r}(\epsilon,\theta)\tilde{g}(\epsilon,\theta)\right)\epsilon d\theta \\ &= \int_{\partial D_{\epsilon,R}}\left(f\frac{\partial g}{\partial n} - \frac{\partial f}{\partial n}g\right)ds. \qquad \square\end{aligned} \tag{3}$$

感想：この問題には手こずったようだが、数名は満点だった。私のホームページの去年の問題を見てそれを丸覚えした答案もあったが、その解答例をよく理解していないと「訊かれた何に答えているのか」分からなくなってしまったようだ。この問題のみ 20 点満点とし後は 10 点満点で採点した。

$\boxed{6}$ 以下の級数の収束、発散を判定し理由を述べよ。

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty \frac{\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n}}{\sqrt{n}}$, （ヒント：$(1+x)^{1/3}$ に「平均値の定理」を適用せよ),

(2) $\displaystyle\sum_{n=2}^\infty \frac{1}{n(\log n)^p}$, （ヒント：正項級数の積分判定法を思い出し、$p > 1$ と $p \leq 1$ に分けて考えよ).

解答例：(1) $f(x) = (1+x)^{1/3}$ に「平均値の定理」を適用すると

$$(1+x)^{1/3} - 1 = f'(\theta x)x, \ \ 0 < \exists\theta < 1$$

となるから、

$$\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n} = \sqrt[3]{n}(\sqrt[3]{1+(1/n)} - 1) \leq \frac{1}{3}\sqrt[3]{n} \times \frac{1}{n}.$$

故に、

$$\left|\frac{\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n}}{\sqrt{n}}\right| \leq \frac{1}{3}\sqrt[3]{n} \times \frac{1}{n\sqrt{n}} = \frac{1}{3}\frac{1}{n^{7/6}}$$

となり、問題の級数は収束する。

ヒント：[平均値の定理] 区間 $[a,b]$ で微分可能な関数 $f(x)$ に対し、ある θ（$0 < \theta < 1$）があって

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(a + \theta(b-a))$$

となる。

(2) $g(x) = x(\log x)^p$ とおくと $g'(x) = (\log x)^p + px(\log x)^{p-1}$ は $[2, \infty)$ で正だから、$g(x)$ は単調増加で $x \to \infty$ で無限大になる。故に、この級数の収束 · 発散は広義積分 $\int_2^\infty g(x)^{-1}dx$ の収束 · 発散と同調する（同時に起こる）。変数変換 $y = \log x$ を用いて

$$\int_2^\infty \frac{dx}{x(\log x)^p} = \int_{\log 2}^\infty \frac{dy}{y^p} = \begin{cases} \text{収束する} & (p > 1), \\ \text{発散する} & (p \leq 1). \end{cases}$$

ヒント:[正項級数の積分判定法] $f(x)$ は $[1, \infty)$ 上で正値、かつ単調減少とする。このとき正項級数 $\sum_{n=1}^\infty f(n)$ と広義積分 $\int_1^\infty f(x)dx$ は同時に収束、発散する。

感想：以下の [d'Alembert の判定法] 正項級数 $\sum a_n$ に対し

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = r \text{ が存在するとする} \Longrightarrow \begin{cases} \text{もし } 0 \leq r < 1 \text{ ならば、} \sum a_n \text{ は収束する、} \\ \text{もし } 1 < r \text{ ならば、} \sum a_n \text{ は発散する。} \end{cases}$$

の仮定『$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = r$ が存在し、$0 \leq r < 1$ ならば』を読み間違えて『$\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ ならば』と考えてしまう人がいた。これは極めて残念な結果である！

以下にメールでの質問とその答：質問１。演習問題として配られた問題の一つに、『$a > 0, b > 0$ に対して級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{an+b}$ は発散する』となっていたがどうしてか？コーシーの定理を使って a と b の大小についての場合わけして判定すると $r < 1$ のときがあるように思える。

$$\gamma_n = \frac{1}{an+b}, \qquad \frac{\gamma_{n+1}}{\gamma_n} = \frac{an+b}{a(n+1)+b} \to 1 \ (n \to \infty)$$

となり、$\dfrac{\gamma_{n+1}}{\gamma_n} < 1$ だが、$r = \displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\gamma_{n+1}}{\gamma_n} = 1$ となる!

$$\frac{1}{an+b} < \frac{1}{an} \ (\forall n), \qquad \frac{1}{2an} < \frac{1}{an+b} \ (\text{十分大きな } n \text{ に対し})$$

となるから、級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{an+b}$ の発散は級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{an}$ の発散と同時に起こる。

解答例での $\sim$ の意味がはっきりしなかったようだ。$a_n \sim b_n$ とは定数 $c, C > 0$ があって $ca_n < b_n < Ca_n$ となることである。級数の比較判定法を思い出して欲しい。

質問２。 もうひとつはいまさらテイラーの定理についてなのですがテイラーの n は有限ですか？なぜ $=$ で結べるのですか？

試験にも出した平均値の定理は、雑に言って

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a+\theta(x-a)) \quad 0 < \exists\theta < 1$$

だった。これを

$$f(x)-f(a) = f'(a+\theta(x-a))(x-a), \;\; f(x) = f(a) + f'(a+\theta(x-a))(x-a)$$

と書いた。Taylor の定理は

$$f(x) = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{f^{(j)}(a)}{j!}(x-a)^j + R_n$$

と書いたとき、剰余項は

$$R_n = \begin{cases} \dfrac{1}{n!}(x-a)^n f^{(n)}(a+\theta(x-a)), & (\exists\theta \in (0,1)), \\ \dfrac{(1-\theta')^{n-1}}{(n-1)!}(x-a)^n f^{(n)}(a+\theta'(x-a)), & (\exists\theta' \in (0,1)), \end{cases}$$

と書き表せるものであった。関数が Taylor 展開可能とは

$$\lim_{n\to\infty} R_n = 0$$

となるときで、このとき

$$f(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{f^{(j)}(a)}{j!}(x-a)^j$$

と 表記 した。6 月 20 日の講義録を見直して欲しい。