

「微分積分学第2B」 6+7類 V組中間試験解答例 2006.12.19 井上淳

単位に関する事柄：前々回この中間試験に関して以下のように講義録に書いた。

中間試験を受けられなかった人の「総点」は「演習+期末試験=70」の ホボ 10/7 倍したものと  
 する。但し、今回の中間試験は予告問題なので幾分か点がとりやすいはずである。また、期末試  
 験を受けない者には単位が出ない。

今回の試験の終了直前に、「今回の試験は出来なかったので、答案を提出しなければ欠席扱いになりその方が高  
 得点を期待できる」という意見が出た。単位取得だけが命題ならば論理的には極めて正しい。しかし折角やっ  
 た答案の出来がどの程度だったかは私にとって貴重なデータである。そこで、今回の出来が悪かった人の点  
 数は「受けなかった人」と同じ扱いをすると宣言した。

=====

[1] (予告問題の変形版) 整数  $m = 1, 2, \dots$  に対して、実数  $x$  の関数  $g_m(x)$  を

$$g_m(x) = \int_x^{x+(\pi/7)} (\sin \theta)^{2m} d\theta$$

と定める。 $g_m(x)$  の最小値を  $a_m$ 、最大値を  $b_m$  とするとき、極限值  $\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{a_m}{b_m}$  を求めよ。

解答例：[10点] 少し一般化して、任意の  $0 < \alpha < \pi$  に対して

$$g_m(x) = \int_x^{x+\alpha} (\sin \theta)^{2m} d\theta$$

として説明しよう。予告問題では  $\alpha = \pi/2$ 、今回は  $\alpha = \pi/7$  となっているが、一般化した方が計算の筋道が  
 はっきり見えるからである。

(0)  $g_m(x + \pi) = g_m(x)$  より最大値、最小値は  $0 \leq x \leq \pi$  で考えれば良い。

(1) 最小値  $a_m$ 、最大値  $b_m$  の決定。関数のグラフから明らかに

$$a_m = f_m(\pi - \frac{\alpha}{2}) = \int_{\pi-\alpha/2}^{\pi+\alpha/2} (\sin \theta)^{2m} d\theta = \int_{-\alpha/2}^{\alpha/2} (\sin \theta)^{2m} d\theta = 2 \int_0^{\alpha/2} (\sin \theta)^{2m} d\theta,$$

$$b_m = f_m(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}) = \int_{\pi/2-\alpha/2}^{\pi/2+\alpha/2} (\sin \theta)^{2m} d\theta = 2 \int_0^{\alpha/2} (\sin(\theta + \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}))^{2m} d\theta = 2 \int_0^{\alpha/2} (\cos \theta)^{2m} d\theta.$$

(2)  $\alpha$  が小さいとき、即ち、 $\alpha = \pi/7$  のとき:

$$a_m = 2 \int_0^{\alpha/2} (\sin \theta)^{2m} d\theta \leq \alpha (\sin \alpha/2)^{2m}, \quad b_m = 2 \int_0^{\alpha/2} (\cos \theta)^{2m} d\theta \geq \alpha (\cos \alpha/2)^{2m}$$

より

$$0 \leq \frac{a_m}{b_m} \leq (\tan \alpha/2)^{2m} \rightarrow 0 \quad \text{if} \quad \tan \alpha/2 < 1 \quad \text{i.e.} \quad \alpha/2 < \frac{\pi}{4}.$$

(注意) この評価は  $\alpha = \pi/2$  の場合は  $\tan \alpha/2 = 1$  となるので使えない。予告問題での  $\alpha = \pi/2$  の場合を考え  
 てみよう。  $0 \leq \theta \leq \pi/4$  では  $\cos \theta \geq \sin \theta$  だから

$$\sin(\theta + \frac{\pi}{4}) = \sin \theta \cos \frac{\pi}{4} + \sin \frac{\pi}{4} \cos \theta \geq 2 \sin \frac{\pi}{4} \sin \theta = \sqrt{2} \sin \theta.$$

故に、

$$b_m \geq 2 \int_0^{\pi/4} (\sqrt{2} \sin \theta)^{2m} d\theta = 2^m a_m$$

であり、

$$0 < \frac{a_m}{b_m} \leq \left(\sin \frac{\pi}{4}\right)^{2m} = 2^{-m} \quad \text{故に} \quad \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{a_m}{b_m} = 0.$$

この証明は以下のように一般化される。 $0 \leq \theta, \alpha/2 \leq \pi/4$  ならば

$$\sin\left(\theta + \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}\right) = \cos\left(\theta - \frac{\alpha}{2}\right) = \cos \theta \cos \frac{\alpha}{2} + \sin \theta \sin \frac{\alpha}{2} \geq 2 \sin \frac{\alpha}{2} \sin \theta$$

となるから、もし  $2 \sin \alpha/2 > 1$ 、即ち、 $\pi/2 > \alpha/2 > \pi/6$  ならば  $\alpha = \pi/2$  の場合の評価と同様にして

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{a_m}{b_m} = \lim_{m \rightarrow \infty} \left(2 \sin \frac{\alpha}{2}\right)^{-2m} = 0.$$

別解 1: 周期性を言ってあげれば、(1) の部分は微分積分の基本定理を用いて

$$f'_m(x) = ((\sin(x + \alpha))^2 - (\sin x)^2)(\dots), \quad (\dots) > 0$$

だから

$$f'_m(x) = 0 \implies 0 = (\sin(x + \alpha))^2 - (\sin x)^2 = \sin(2x + \alpha) \sin \alpha$$

となる。故に

$$x + \frac{\alpha}{2} = \frac{\pi}{2}, \quad \text{或いは} \quad \pi \iff \sin(2x + \alpha) = 0$$

としてもよい。

[2] 以下の (広義) 積分の値を求めよ。

$$(i) \int_0^1 x^m (\log x)^n dx \quad (m > -1), \quad (ii) \int_a^b \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} \quad (a < b).$$

ヒント: (i) 漸化式を考えよ。(ii) 変数変換  $t = \sqrt{(b-x)/(x-a)}$  を用いよ。

解答例: (i)[5点]  $m > -1$  なので  $\delta > 0$  を  $m - \delta > -1$  なるようにとれる。被積分関数の問題になりそうな点 0 で  $x^m (\log x)^n = x^{m-\delta} x^\delta (\log x)^n$  として  $x^\delta (\log x)^n$  は  $x \rightarrow 0$  のとき  $n$  が何であっても 0 に収束することは示せるので、積分の下端で広義積分として意味がつく。そこで部分積分を用いて

$$I_{m,n} = \int_0^1 x^m (\log x)^n dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} (\log x)^n \Big|_0^1 - \frac{n}{m+1} \int_0^1 x^m (\log x)^{n-1} dx = -\frac{n}{m+1} I_{m,n-1}.$$

これを繰り返して

$$I_{m,n} = (-1)^n \frac{n!}{(m+1)^n} I_{m,0}, \quad I_{m,0} = \frac{1}{m+1}, \quad \text{だから} \quad I_{m,n} = (-1)^n \frac{n!}{(m+1)^{n+1}}. \quad \square$$

(ii)[5点] 変数変換  $t = \sqrt{(b-x)/(x-a)}$  を用いると、

$$x = \frac{at^2 + b}{t^2 + 1}, \quad (x-a)(x-b) = \frac{(b-a)^2 t^2}{(t^2 + 1)^2}, \quad \frac{dx}{dt} = \frac{2(a-b)t}{(t^2 + 1)^2}, \quad (a, b] \ni x \rightarrow -t \in [0, \infty),$$

となるから

$$\int_a^b \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} = \int_0^\infty \frac{2}{t^2 + 1} dt = 2 \arctan t \Big|_0^\infty = \pi. \quad \square$$

注意: 数年前に同じ問題を出したとき、途中の計算ミスで  $-\pi$  を答としたものがあった。被積分関数が正値で積分区間も「正方向に」設定してあるとき、それから負値が出てきたら何かおかしい、という感覚を持って欲しいものである。

[3] 次の不定積分を求めよ。

$$(i) \int \arccos(3x) dx, \quad (ii) \int \frac{1}{x + 2\sqrt{x-1}} dx.$$

解答例：(i)[5点] 逆三角関数の微分は有理関数または無理関数なので、部分積分を用いて、それらの微分に帰着させることを考えるとよい。 $x' = 1$  だから、

$$\int \arccos(3x) dx = x \arccos(3x) - \int x(\arccos(3x))' dx = x \arccos(3x) - \frac{1}{3} \sqrt{1-9x^2}. \quad \square$$

勿論  $y = \arccos(3x)$  とおき、 $3x = \cos y$ ,  $3dx/dy = -\sin y$  を用いて

$$\begin{aligned} \int \arccos(3x) dx &= \int y \frac{-\sin y dy}{3} = -\frac{1}{3} \int y(-\cos y)' dy \\ &= \frac{1}{3} y \cos y - \frac{1}{3} \sin y = x \arccos(3x) - \frac{1}{3} \sqrt{1-9x^2} \end{aligned}$$

としてもよい。ここで、 $\sin y = \sin(\arccos(3x))$  としたものはあまりにも綺麗でない故に、また、 $y$  のままで変数を  $x$  に戻していない解答は減点する。

(ii)[5点]  $y = \sqrt{x-1}$  とおくと  $x = y^2 + 1$ ,  $dx/dy = 2y$  だから

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x+2\sqrt{x-1}} dx &= \int \frac{2y}{y^2+2y+1} dy = \log(y^2+2y+1) - \int \frac{2}{y^2+2y+1} dy \\ &= \log(y^2+2y+1) - 2 \arctan(y+1) = \log(x+\sqrt{x-1}) - 2 \arctan(1+\sqrt{x-1}). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{別表示 1} &= \int \frac{2(y+1)-2}{(y+1)^2} dy = 2\log(y+1) + 2\frac{1}{y+1} \\ &= 2\log(\sqrt{x-1}+1) + 2\frac{1}{\sqrt{x-1}+1}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{別表示 2} &= 2 \int y \left( -\frac{1}{y+1} \right)' dy = -\frac{2y}{y+1} + \log(y+1) \\ &= -\frac{2\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-1}+1} + 2\log(\sqrt{x-1}+1). \quad \square \end{aligned}$$