ベクトル解析入門–version1: 06.1.09

2005 年度 V 類 T 組微積分学第 2 講義+演習より
井上淳+染川睦朗　2005.10–12.

力学や電磁気学[1]ではベクトル解析という記述方式が現象を表す極めて有効な道具として使われている。そこで使われる物理的事象の表現の多くは、数学的には Riemann 重積分での部分積分公式の一部でしかないが、その公式にあらわれる領域の表面とか、その上の法線とか、表面上での積分とかの数学的表示の定義自身が重要になる。

微分積分学の基本定理として、『f が $I=[a,b]$ 上で 微分可能でさらに微分したものが連続 ならば

$$\int_a^b f'(x)dx = f(b) - f(a)$$

となる』は講義でも説明した。Riemann 可積分な関数の中には連続でないものもあることも説明したのだから、この f が C^1-級という仮定は弱められるのではという疑問もあろう。このような疑問を持ってくれたならばこの講義は意味があったとも言えるのだが、君達が遭遇する事象に関しては、ここ当分はそれ程気にしなくても良いだろう。それはそうと素朴に、微分積分学の基本定理の 2,3 次元版はどうなるのだろうか？

以下の記述は、最後の文献表に載せた多くの教科書を参照し、表現を借り混ぜ合わせたもので、筆者達の貢献はテニヲハでしかない。これが剽窃とされると困るのだが、教科書の類いはそういうものだとして許して欲しいものである。

1　多重積分の応用

学生諸君の多くが大学に入って新しく学んだ数学の技法として、多変数関数の微分と積分があろう。それらを応用して導かれる事柄が、力学や電磁気学を学びそれを工学的に応用する基礎として必要になる。

1.1　面積と体積

定義 1.1.1 (面積) xy-平面上の（有界な）図形 D の面積 $|D|$ は $D \subset I$ なる任意の長方形 I をとって

$$|D| = \iint_D dxdy = \iint_I \chi_D(x,y)dxdy$$

と定めた。ここで、$\chi_D(x,y) = \begin{cases} 1 & (x,y) \in D, \\ 0 & otherwise \end{cases}$ は図形 D の特性関数と呼ばれるものである。

注意：このとき、$D \subset I$ なる長方形 I の取り方にはよらないことが重積分の定義から分るので、長方形 I のことを言及せずに面積 $|D|$ といって良いのだった。
以下の定理はすでに示した。

[1] これらではそれぞれ異なる物理量を観測するのだが、数学的記述では無次元化したものを扱う。これによって共通の性質を「観測」できるのが「数学的思考」のメリットである

定理 1.1.1 $f \in C([a,b])$ とし、$y = f(x) \geq 0 (a \leq x \leq b)$ のグラフと x-軸、$x = a$、$x = b$ で囲まれた領域の面積は次のように与えられる：

$$S = \int_a^b f(x)dx.$$

実際、$D = \{(x,y) \mid a \leq x \leq b,\ y \leq f(x)\}$ とし $I = [a,b] \times [0,d]$ $(d \geq \max_{x \in I} f(x))$ とすると、Fubini の定理を用いて累次積分に直して

$$|D| = \iint_I \chi_D(x,y)dxdy = \int_a^b \left(\int_0^d \chi_D(x,y)dy \right) dx = \int_a^b \left(\int_0^{f(x)} 1dy \right) dx = \int_a^b f(x)dx.$$

面積等と言うものは数学者に言われなくとも実生活の実感として知っていると思う人もいるだろうが、果たしてそうだろうか？例えば、コンピュータに面積とは何かをどのように判断させるのだろうか？或いは、如何に効率良く積分を計算させたらよいか？このような「幾分かでも異なる視点で物を見る」という経験が、数学という教科目では簡単に安価にできるところが妙味である。大概の「工学に必要な計算技法」はいまや適当なソフトに実装され実験数値を入れれば答が出てくるようになっているのだから、他人と違うことをするためにも「幾分かでも異なる視点で物を見て」大本から考え直す事がより大切なのである。

また、仮定 $f \in C([a,b])$ は Riemann 積分可能な関数 f にまで拡げられること、即ち、図形で境界に穴が空いている場合とか段違いになっている場合にも広義積分と言う概念を用いて面積を定義できることを示した。

図 1: 不連続グラフの「囲う図形」

定理 1.1.2 極座標表示 $r = r(\theta)$ $(\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2)$ による曲線と、$\theta = \theta_1$, $\theta = \theta_2$ によって囲まれる扇状領域の面積は

$$S = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{1}{2} r(\theta)^2 d\theta$$

で与えられる。

上には 2 次元での積分を用いたが何次元でも同様に考えることはでき、2 次元での面積に相当するものを 3 次元では体積と称したのだった。そして以下のような結果はすぐ分る。

定理 1.1.3 (回転体の体積) $y = f(x)$ $(f(x) \geq 0,\ a \leq x \leq b)$ の x-軸の周りの回転体の体積は

$$V = \pi \int_a^b f(x)^2 dx$$

で与えられる。

1.2 線積分–1 次元積分の応用例

1 変数のベクトル値関数を考えると線積分の概念が生じる。

1.2.1 曲線の定義と曲線の長さ

定義 1.2.1 (パラメタ付き曲線) $\mathbb{R}$ の有界閉集合 $I = [a, b]$ で定義され $\mathbb{R}^d$ 値の連続関数 $\mathbf{u} : I \ni t \to \mathbf{u}(t) = (u_1(t), \cdots, u_d(t)) \in \mathbb{R}^d (d = 2, 3, \cdots)$ を、$\mathbb{R}^d$ におけるパラメタ付き曲線と言う。各 u_j が C^1-級のとき C^1-級の連続曲線 と言う。$\mathbf{u}(I)$ をこのパラメタ付き曲線の跡（トレース）或いは軌跡 C という。$\mathbf{u}(a)$ を C の始点、$\mathbf{u}(b)$ を終点といい、始点と終点と一致する曲線を 閉曲線 という。ある $t_1 \neq t_2,\ t_1, t_2 \in (a, b)$ で $\mathbf{u}(t_1) = \mathbf{u}(t_2)$ となるとき、このような点を 重複点 と呼び、重複点を持たない曲線を 単純曲線 と言う。

定義 1.2.2 (曲線の向き、足し算) 二つの滑らかな空間曲線

$$C : \mathbf{v} = \mathbf{v}(t),\ a \leq t \leq b,$$
$$\Gamma : \mathbf{u} = \mathbf{u}(\tau),\ \alpha \leq \tau \leq \beta$$

の助変数 t, τ の間に適当な関数関係 $t = t(\tau)$ があって

$$\mathbf{u}(\tau) = \mathbf{v}(t(\tau)),\ \frac{dt}{d\tau} > 0,\ t(\alpha) = a,\ t(\beta) = b$$

が成り立つならば、C と Γ は図形として相等しいばかりでなく、点の運動（t, τ を時間と考えて）としても同

図 2: 異なるパラメタ表示の意味

じ向きの運動を表し、ただ速度を異にするだけである。このとき C と Γ とは向きを込めて同じ曲線であるという。もし、

$$\mathbf{u}(\tau) = \mathbf{v}(t(\tau)),\ \frac{dt}{d\tau} < 0,\ t(\alpha) = a,\ t(\beta) = b$$

なる関係があるとき、C と Γ とは図形としては相等しいが、点の運動と考えれば向きが逆になる。このとき、Γ は C とは逆の向きを持つといい $\Gamma = -C$ と書く。

上の曲線 $C : \mathbf{v} = \mathbf{v}(t),\ a \leq t \leq b$ を $t = c$ に対応する点において 2 つに分け

$$C' : \mathbf{v} = \mathbf{v}(t),\ a \leq t \leq c, \quad C'' : \mathbf{v} = \mathbf{v}(t),\ c \leq t \leq b$$

とするとき、C は C' と C'' との和であるといい、$C = C' + C''$ と書く。このとき

$$\int_{C'+C''} = \int_{C'} + \int_{C''}, \quad \int_{-C} = -\int_C$$

が成立する。

注意：二つの曲線がある点で交わるとき、一方からもう一方に乗り移る事によって新しい曲線ができる。このとき、この新しい曲線は交わった点の近辺では滑らかでないのが一般的である。こういう事態が起こるので、曲線はいつでも C^1-級、と仮定するのは望ましくない（大概、区分的[2]に C^1-級と仮定しておけば良い）！このような事態に対してどうするか？一つの方法は、具合が悪い点を除いてからその除く部分を減らして何か（捕まえられれば）捕まえるという広義積分での特異点の処理方法を用いる事が普通である。

[2]例えば、点 P から点 Q、点 Q から点 R までそれぞれの曲線は滑らか、全体で見ると点 Q で折れていたりする

図 3: （上の数行のページ右半分に） 2 つの曲線の和の意味

定義 1.2.3 ($\mathbb{R}^3$ での線積分) *3* 次元空間での C^1-級連続な空間曲線 $C: x = X(t),\ y = Y(t),\ z = Z(t)\ (\alpha \le t \le \beta)$、両端点を $A = (X(\alpha), Y(\alpha), Z(\alpha)),\ B = (X(\beta), Y(\beta), Z(\beta))$ とする。A から B の方へ曲線 C 上に点 $P_i = (x_i, y_i, z_i)\ (i = 1, 2, \cdots, n-1)$ を取り、$\overset{\frown}{AB}$ を n 分割する。これらの点は

$$P_0 \equiv A, P_1, \cdots, P_{n-1}, P_n \equiv B$$

の順にあるとし各弧 $\overset{\frown}{P_{i-1}P_i}$ 上に点 $Q_i = (\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$ を取り、曲線 C の近くで連続な関数 f に対してリーマン和

$$X_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta x_i, \quad \Delta x_i = x_i - x_{i-1},$$

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta s_i, \quad \Delta s_i = \sqrt{\Delta x_i^2 + \Delta y_i^2 + \Delta z_i^2},\ \Delta y_i = y_i - y_{i-1},\ \Delta z_i = z_i - z_{i-1}$$

を作る。この分割を細かくする（即ち、$\max_i \Delta s_i \to 0 (n \to \infty)$）とき、点 $Q_i = (\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$ と分割によらず極限値を持つことが示され、それをそれぞれ、

$$\int_C f(x, y, z)dx, \quad \int_C f(x, y, z)ds$$

と書く。特に、上で $f \equiv 1$ として

$$\ell(C) = \int_C ds$$

が存在するときそれを <u>曲線 C の長さ</u> と言う。

更に、この曲線 C に沿う A から B への線積分を

$$\begin{aligned}&\int_C (f(x, y, z)dx + g(x, y, z)dy + h(x, y, z)dz)\\ &\quad = \int_\alpha^\beta \big[f(X(t), Y(t), Z(t))X'(t) + g(X(t), Y(t), Z(t))Y'(t) + h(X(t), Y(t), Z(t))Z'(t)\big]dt\end{aligned}$$

と定義する。

注意：同じ曲線の異なるパラメタ表示に対して曲線の長さや線積分は同じ値を与えるのか？これに答えるのが、積分記号下での変数変換公式で、付録として与えておいた。

$\mathbb{R}^2$ での線積分も同様に定義されるので、ここでは詳しくは書かない。

定理 1.2.1 C^1-級連続 $y = \phi(x) \ge 0 (a \le x \le b)$ のグラフの長さ ℓ は

$$\ell = \int_a^b \sqrt{1 + \phi'(x)^2}dx$$

で与えられる。

実際、このグラフは、$t=x$ とし $(t,\phi(t))\in\mathbb{R}^2$ と考えればパラメタ付き曲線であり、曲線上 1 の線積分である。

系 1.2.1 曲線が極表示 $r=r(\theta)$ $(\theta_1\le\theta\le\theta_2)$ の場合の曲線の長さは

$$\ell=\int_{\theta_1}^{\theta_2}\sqrt{r(\theta)^2+r'(\theta)^2}d\theta.$$

系 1.2.2 曲線がパラメタ表示 $x=X(t),y=Y(t)(t_1\le t\le t_2)$ の場合の曲線の長さは

$$\ell=\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{X'(t)^2+Y'(t)^2}dt.$$

同様に、

定理 1.2.2 空間曲線の場合曲線がパラメタ表示 $x=X(t),y=Y(t),z=Z(t)(t_1\le t\le t_2)$ の場合の曲線の長さは

$$\ell=\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{X'(t)^2+Y'(t)^2+Z'(t)^2}dt.$$

1.3 面積分–2 次元積分の応用例

1.3.1 曲面の定義と曲面積

少々雑だが、3 次元空間内の曲面を以下のように定義しよう。

定義 1.3.1 (曲面) $\mathbb{R}^2$ の領域 D が長方形 $I=[a,b]\times[c,d]$ に含まれるとする。D 上の C^1-級の連続関数 $z=f(x,y)$ に対し点 $(x,y,f(x,y))$ の集合 S

$$S=\{(x,y,f(x,y))\in\mathbb{R}^3\mid(x,y)\in D\}$$

を C^1-曲面という。

注意：上の例は $F(x,y,z)=z-f(x,y)=0$ と見なせる。より一般には F に対し $S=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\mid F(x,y,z)=0\}$ を曲面と言って良いように思える。F が C^1-級で至る所で $F_x^2+F_y^2+F_z^2\neq 0$ なるとき、特異点のない C^1-級曲面をなすと言う。

定義 1.3.2 (曲面のパラメタ表示と曲面の向き) 特異点を持たない[3] 滑らかな二つの曲面

$$\begin{aligned}&S:\mathbf{v}=\mathbf{v}(t,s)={}^t(x(t,s),y(t,s),z(t,s)),\ (t,s)\in A,\\&\Sigma:\mathbf{u}=\mathbf{u}(\tau,\sigma),\ (\tau,\sigma)\in B\end{aligned}$$

の助変数 (t,s) と (τ,σ) の間に一対一対応 $u=u(\tau,\sigma),\ v=v(\tau,\sigma)$ が与えられ $\mathbf{u}(\tau,\sigma)=\mathbf{v}(u(\tau,\sigma),v(\tau,\sigma))$ が成り立つとする。任意の (τ,σ) に対し

$$\frac{\partial(t,s)}{\partial(\tau,\sigma)}=\det\begin{pmatrix}\frac{\partial u}{\partial\xi}&\frac{\partial u}{\partial\eta}\\\frac{\partial v}{\partial\xi}&\frac{\partial v}{\partial\eta}\end{pmatrix}>0$$

[3] $(\partial(x,y)/\partial(t,s))^2+(\partial(y,z)/\partial(t,s))^2+(\partial(z,x)/\partial(t,s))^2\neq 0$

が成り立つとき、S と Σ は同じ曲面であると見なす。もし、任意の (τ, σ) に対し

$$\frac{\partial(t,s)}{\partial(\tau,\sigma)} < 0$$

ならば、S と Σ は逆の向きを持つといい $\Sigma = -S$ で表す。曲面の和も曲線の場合と同様に定義する。

注意：向き付けできない曲面の例として有名なのが Möbius の帯である。

図 4: Möbius の帯

注意：曲面 S 条の点 P を通る u 曲線（v を固定し u を動かしてできる曲線）の u が増加する方向の接ベクトルを $\mathbf{u}$、v 曲線の v が増加する方向の接ベクトルを $\mathbf{v}$ とし、$\mathbf{n} = \mathbf{u} \times \mathbf{v}$ と定め、これを P における外向き法線という。このとき 3 本のベクトル $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{n}$ が右手系の座標軸（この順に右手の親指、人差指、中指を開いた方向）を作るという。

図 5: 右手系の座標軸

定義 1.3.3 (曲面積) $\mathbb{R}^2$ の縦集合 $D = (x,y) \mid \phi(x) \leq y \leq \psi(x),\ a \leq x \leq b\}$ が有界閉区間 $A = [a,b] \times [c,d]$ に含まれているとする。D で定義された連続関数 $z = f(x,y)$ で与えられた曲面を考える。A の分割

$$\Delta : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b,\ c = y_0 < y_1 < \cdots, y_m = d$$

に対して、点 (x_i, y_j) を P_{ij} で表し、$P_{ij} \in D$ ならば対応する曲面上の点を $\tilde{P}_{ij}$ とする。小区間 $A_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$ が D に含まれるとき、A_{ij} に対角線を入れて 2 つの三角形にわけ、 2 つの三角形の頂点に対応する曲面上の点を頂点とする三角形の面積を S_{ij}, S'_{ij} とする。$A_{ij} \subset D$ となるような (i,j) についての面積の和

$$\sum_{\{(i,j)\ \mid\ A_{ij} \subset D\}} (S_{ij} + S'_{ij})$$

が $|\Delta| \to 0$ のとき収束するならば、この曲面は <u>面積確定</u> であるという。このとき、この極限値を <u>曲面積</u> という。

Schwarz の提灯：曲面積を内接多面体の表面積の極限として定義することは一般にはできない！実際、以下のように「提灯状」のものを考える「できない」ことが示される。半径 r、高さ h の直円筒の高さを m 等分し、それらの分点を通る直裁面に正 n 角形を内接させる。但し、各直裁面において正 n 角形の各頂点 A は隣の裁

面の正 n 角形の一辺 BC が張る弧の中点 A' と同一母線上にあるとする。これらの内接多角形の頂点を結んで、$2mn$ 個の２等辺３角形 ABC を面とする多面体を作ると、各２等辺３角形の底辺 BC は $2r\sin(\pi/n)$ で、高さ AM は

$$\sqrt{\left(\frac{h}{m}\right)^2 + r^2\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right)^2}$$

であるから、この内接多面体の表面積は

$$S_{m,n} = 2mn\cdot r\sin\frac{\pi}{n}\sqrt{\left(\frac{h}{m}\right)^2 + 4r^2\sin^4\frac{\pi}{2n}}$$

となる。例えば、$r=h=1$ とすると

$$S_{m,n} = 2\left(n\sin\frac{\pi}{n}\right)\sqrt{1+4\left(\frac{m}{n^2}\right)^2\left(n\sin\frac{\pi}{n}\right)^2}$$

となるから

$$\lim_{m,n\to\infty} S_{m,n} = \begin{cases} 2\pi & m=n^{\alpha},\ 0<\alpha<1, \\ 2\pi & m=n, \\ 2\pi\sqrt{1+\pi^2/4} & m=n^2, \\ \infty & m=n^3. \end{cases}$$

だから $m,n\to\infty$ のとき $S_{m,n}$ は極限を有しない。$m=\sqrt{n}$ のときどうなるかという質問があったが、$\displaystyle\lim_{n\to\infty} n^{\alpha}/n^2 = 0,\ \lim_{n\to\infty} n^{\alpha}\sin\frac{\pi}{n^{\alpha}} = \pi$ から、上に述べたようになる。

図 6: （上の数行のページ右半分に）提灯の図示

上の曲面積の定義は１次元の場合の曲線の長さの拡張であったから面積分は以下のように定義するのが自然であろう。

定義 1.3.4 (面積分) 特異点を持たない滑らかな曲面

$$S : \mathbf{v} = \mathbf{v}(t,s) = {}^t(x(t,s), y(t,s), z(t,s)),\ (t,s)\in A$$

を含む領域において連続な関数 $f(x,y,z)$ が与えられているとき、積分

$$\iint_A f(x(t,s), y(t,s), z(t,s))\frac{\partial(x,y)}{\partial(t,s)}dtds$$

の値は向きをつけた曲面 S と $f(x,y,z)$ にのみ依って定まり助変数のとり方にはよらないので、これを

$$\iint_S f(x,y,z)dxdy \quad (\text{むしろ} \iint_S f(x,y,z)dx\wedge dy)$$

と書き、$f(x,y,z)$ の S 上での xy 方向の面積分と呼ぶ。同様に

$$\iint_S f(x,y,z)dydz, \quad \iint_S f(x,y,z)dzdx$$

も定義される。また、

$$\iint_A f(x(t,s),y(t,s),z(t,s))\sqrt{\left(\frac{\partial(x,y)}{\partial(t,s)}\right)^2+\left(\frac{\partial(y,z)}{\partial(t,s)}\right)^2+\left(\frac{\partial(z,x)}{\partial(t,s)}\right)^2}dtds$$

も同様に S と $f(x,y,z)$ に依って定まり、これを接平面方向の面積分といい、

$$\iint_S f(x,y,z)d\sigma$$

で表す。面積分が S と $f(x,y,z)$ にのみ依って定まるのは、S を小さい部分 S_j に分け S_j の曲面積に $f(x,y,z)$ を掛けたものの和[4]の極限値なることから分る。この表記で S の曲面積は $\iint_S d\sigma$ となる。

注意：ところで

$$\iint_S f(x,y,z)dzdx \quad と \quad \iint_S f(x,y,z)dxdz$$

とはどう違うのか？その違いを演習のプリント説明では

$$\iint_S f(x,y,z)dz\wedge dx = -\iint_S f(x,y,z)dx\wedge dz$$

と表現し、$dz\wedge dx = -dx\wedge dz$ と表したが、これは一体なんだろうか？$\int\cdots dx$ はある量を表現する記号であったし、dx には意味がつかなかったはずでは？

より正確には $dz\wedge dx$ と書いた方がよいのだが、そのためには「微分（differentail）、微分形式」やそれらの外積と言う概念を導入する必要があるのでここでは少々良い加減にとどめておく。

1.4 線積分、面積分の応用

以下の定理は本質的に部分積分公式でしかないが、一般の領域では難しいので、特殊な形の領域についてのみ証明を与える事にする。

定理 1.4.1 (Green の公式) xy-平面の領域 D で区分的に C^1-級の境界を持つとする。D の閉包 $\bar{D}$ 上で与えられた関数 f, f_y, g, g_x が連続なるとき、

$$\iint_D [g_x(x,y)-f_y(x,y)]dxdy = \int_{\partial D}(f(x,y)dx+g(x,y)dy).$$

注意：考えている領域の境界がやたらとギザギザしていたらどうなるか？という疑問も当然である。しかし、これに対するもっとも一般的な結果は「積分論」自身に工夫を加えなければならなくなるであろうし、私も良く知らない。

命題 1.4.1 (Green の公式 1) xy-平面の x について縦線型領域 $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid a<x<b,\ \psi(x)<y<\varphi(x)\}$ をとる。D の閉包 $\bar{D}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid a\le x\le b,\ \psi(x)\le y\le\varphi(x)\}$ 上で与えられた関数 f, f_y が連続なるとき、D の周 ∂D を D に関して正の向きに一周すると

$$\iint_D f_y(x,y)dxdy = \int_{\partial D} f(x,y)dx.$$

証明：Fubini の定理と微分積分学の基本定理から

$$\iint_D f_y(x,y)dxdy = \int_a^b\left[\int_{\psi(x)}^{\varphi(x)} f_y(x,y)dy\right]dx = \int_a^b \big(f(x,\varphi(x))-f(x,\psi(x))\big)dx.$$

[4]或いは曲面をパラメタ表示し領域 A を小さく分けて Riemann 和を考える

$\psi(b) < \varphi(b),\ \psi(a) < \varphi(a)$ とし、$\partial D = \sum_{j=1}^{4} \Gamma_j$ を $\Gamma_1 = \{(x,y) \mid a \le x \le b,\ y = \psi(x)\}$、$\Gamma_3 = \{(x,y) \mid x = -t,\ y = \varphi(-t),\ -b \le t \le -a\}$、$\Gamma_2 = \{(b,y) \mid \psi(b) \le y \le \varphi(b)\}$、$\Gamma_4 = \{(a,y) \mid \psi(a) \le y \le \varphi(a)\}$ と分解する。$\int_{\partial D} f(x,y)dx$ の Γ_2 と Γ_4 に沿う x に関する線積分は零になるから、

$$\int_{\partial D} f(x,y)dx = \int_{\Gamma_1} f(x,y)dx + \int_{\Gamma_3} f(x,y)dx = \int_a^b \big(f(x,\varphi(x)) - f(x,\psi(x))\big)dx. \qquad \Box$$

図 7: 領域とその境界 2

注意：「∂D を D に関して正の向きに一周する」とは領域 D を左側に見て ∂D を前に進む、という意味である。また、上の命題で「x について」を y についての縦線型領域とすれば

$$\iint_D g_x(x,y)dxdy = \int_{\partial D} g(x,y)dy.$$

が成立する。

命題 1.4.2 (Green の公式 2) 有界な領域 D の境界が区分的に滑らかな有限個の単一閉曲線からなるとし、このすべてに正の向きをつけたものを ∂D とする。xy-平面の閉領域 D 上で与えられた関数 f, f_y, g, g_x が連続なるとき、

$$\iint_D [g_x(x,y) - f_y(x,y)]dxdy = \int_{\partial D} (f(x,y)dx + g(x,y)dy).$$

証明：この命題 1.4.2 は積分領域を分割して上の命題 1.4.1 を適用すれば良い。

図 8: 領域とその境界 2-1

定理 1.4.2 (Gauss の公式（発散定理）) 空間の閉領域 V 上で C^1-級の関数 f, g, h に対し

$$\iiint_V \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial z}\right)dxdydz = \iint_{\partial V} (f(x,y,z)dydz + g(x,y,z)dzdx + h(x,y,z)dxdy).$$

証明（特殊な形の領域のとき）：$\varphi,\ \psi$ を $\bar{D}$ で連続とする。

$$V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x,y) \in D,\ \psi(x,y) < z < \varphi(x,y)\}$$

のとき

$$\iiint_V h_z(x,y,z)dxdydz = \iint_D \left[\int_{\psi(x,y)}^{\varphi(x)} h_z(x,y,z)dz\right]dxdy$$
$$= \iint_D \big(h(x,y,\varphi(x,y)) - h(x,y,\psi(x,y))\big)dxdy.$$

ここで

$$S_1 = \{(x,y,z) \mid (x,y) \in \bar{D},\ z = \varphi(x,y)\},$$
$$S_2 = \{(x,y,z) \mid (x,y) \in \bar{D},\ z = \psi(x,y)\},$$
$$S_3 = \{(x,y,z) \mid (x,y) \in \partial D,\ \psi(x,y) \leq z \leq \varphi(x,y)\}$$

とおくと $\partial V = \cup_{j=1}^3 S_j$ であり

$$\iint_D \left[\int_{\psi(x,y)}^{\varphi(x)} h_z(x,y,z)dz\right]dxdy$$
$$= \iint_{S_1} h(x,y,z)dx \wedge dy + \iint_{S_2} h(x,y,z)dx \wedge dy. \qquad \square$$

図 9: 領域とその境界 3

定理 1.4.3 (Stokes の公式) 曲面 S 及び ∂S 上で C^1-級の関数 f, g, h に対し

$$\iint_S \left[\left(\frac{\partial h}{\partial y}-\frac{\partial g}{\partial z}\right)dydz+\left(\frac{\partial f}{\partial z}-\frac{\partial h}{\partial x}\right)dzdx+\left(\frac{\partial g}{\partial x}-\frac{\partial f}{\partial y}\right)dxdy\right] = \int_{\partial S}(f(x,y,z)dx+g(x,y,z)dy+h(x,y,z)dz).$$

証明（特殊な形の領域のとき）：$\tilde{f}(u,v) = f(x(u,v), y(u,v), z(u,v))$ とおくと Green の公式から

$$\int_{\partial D} \tilde{f}(u,v)\left(\frac{\partial x}{\partial u}du + \frac{\partial x}{\partial v}dv\right)$$
$$= \iint_D \left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\tilde{f}(u,v)\frac{\partial x}{\partial v}\right) - \frac{\partial}{\partial v}\left(\tilde{f}(u,v)\frac{\partial x}{\partial u}\right)\right]dudv$$

となる。この最右辺の被積分関数は

$$\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial \tilde{f}}{\partial u} - \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial \tilde{f}}{\partial v}$$
$$= \frac{\partial x}{\partial v}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial u}\right) - \frac{\partial x}{\partial u}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial v}\right)$$
$$= \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)} - \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$$

となるので

$$\iint_S \left(\frac{\partial f}{\partial z}dzdx - \frac{\partial f}{\partial y}dxdy\right) = \int_{\partial S} f(x,y,z)dx. \qquad \square$$

2　ベクトル解析入門

2.1　内積と外積

定義 2.1.1 $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3), \mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3), \cdots$ とする。

(i) $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{3} u_i v_i \in \mathbb{R}$ を内積（スカラー積）という。

(ii) 外積（ベクトル積）を

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \times \mathbf{v} = [\mathbf{u}, \mathbf{v}] &= (u_2 v_3 - u_3 v_2, u_3 v_1 - u_1 v_3, u_1 v_2 - u_2 v_1) \\ &= \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix} \text{の } \{e_j\} \text{ に関する余因子からなるベクトル} \end{aligned}$$

と定める。ここで、

$$[\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}] = \mathbf{u}[\mathbf{v}, \mathbf{w}] = \det \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{bmatrix}$$

注意：二つのベクトル $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ の内積 $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}$ は、両者の成す角を $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = \|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\| \cos\theta$ と定義する。特に、二つのベクトル $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ が直交 (i.e. $\mathbf{u} \perp \mathbf{v}$) するのは $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = 0$ のときである。

定義 2.1.2 行列式 $\det \begin{bmatrix} a & c \\ d & b \end{bmatrix} = ab - cd$ は二つのベクトル $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a \\ d \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} c \\ b \end{pmatrix}$ が張る平行四辺形の符号付き面積に等しい。ここで符号は、ベクトル $\mathbf{A}$ からベクトル $\mathbf{B}$ へ回る向きが正（反時計回り）、逆向き（時計回り）と定める。

図 10: 行列式の符号

$$\begin{aligned} \Box OACB &= (\Box OACB + \Box ADFC) - \Box ADFC \\ &= \Box ODFB - \Box ADFC = ab - cd. \end{aligned}$$

注意：二つのベクトル $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ の外積 $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ は、与えられた二つのベクトルに垂直で、向きは $\mathbf{u}$ から $\mathbf{v}$ に右ネジを回したときに進む向き、長さは両者の成す角を θ とする $\|\mathbf{u}\|\cdot\|\mathbf{v}\| \sin\theta$（二つのベクトルで張られる平行四辺形の面積）とで与えられるものである。特に二つのベクトル $\mathbf{u}$、$\mathbf{v}$ が xy-平面にある、即ち、$u_3 = v_3 = 0$ のとき、$\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ は常に z-軸方向なので z-成分だけを考えれば良く、その値は

$$u_1 v_2 - u_2 v_1 = \det \begin{bmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{bmatrix}$$

となる。

主張 2.1.1 ベクトル $\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{C}$, 及び $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ に対して

$$\begin{aligned}&\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}\geq 0,\quad \mathbf{A}\cdot\mathbf{A}=0\Longleftrightarrow\mathbf{A}=0,\\&\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}=\mathbf{B}\cdot\mathbf{A},\\&(\alpha\mathbf{A}+\beta\mathbf{B})\cdot\mathbf{C}=\alpha\mathbf{A}\cdot\mathbf{C}+\beta\mathbf{B}\cdot\mathbf{C},\end{aligned}$$

また、$\|\mathbf{A}\|=\sqrt{\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}}$ と定め、ノルムという。記述上、単に $|\mathbf{A}|$ とも書く。このとき、

主張 2.1.2 任意のベクトル $\mathbf{A},\mathbf{B}$, 及びスカラー α に対して
(1) $\|\mathbf{A}\|\geq 0,\quad \|\mathbf{A}\|=0\Longleftrightarrow\mathbf{A}=0,$
(2) $\|\alpha\mathbf{A}\|=|\alpha|\|\mathbf{A}\|,$
(3) $\|\mathbf{A}+\mathbf{B}\|\leq\|\mathbf{A}\|+\|\mathbf{B}\|.$

主張 2.1.3 任意のベクトル $\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{C}$, 及びスカラー a に対して

$$\begin{aligned}&(i)\mathbf{A}\times\mathbf{B}=0\Longleftrightarrow\mathbf{A}//\mathbf{B},\\&(ii)\mathbf{A}\times\mathbf{B}=-\mathbf{B}\times\mathbf{A},\\&(iii)(\mathbf{A}+\mathbf{B})\times\mathbf{C}=\mathbf{A}\times\mathbf{C}+\mathbf{B}\times\mathbf{C},\\&(iv)(a\mathbf{A})\times\mathbf{B}=\mathbf{A}\times(a\mathbf{B})=a(\mathbf{A}\times\mathbf{B}).\end{aligned}$$

主張 2.1.4 [5]質点 m が原点方向の中心力 $f(\mathbf{r})\mathbf{r}$ を受けながら、運動 $\mathbf{r}=\mathbf{r}(t)$ をするとすると、

$$m\ddot{\mathbf{r}}(t)=f(\mathbf{r})\mathbf{r}$$

なる方程式を満たす（*Newton* の運動方程式）。このとき、以下が成立する：
(1) $\mathbf{r}\times\dot{\mathbf{r}}=\mathbf{K}$ は時間に関し一定である。
(2) $\mathbf{K}=0$ ならば、この質点は原点を通る一直線上を運動する。$\mathbf{K}\neq 0$ のとき、この質点は原点を通り $\mathbf{K}$ に垂直な平面上を動く。
(3) この質点の原点に関する面積速度 *(=*$\mathbf{r}(t)$ が単位時間内に通過する部分の面積*)* は一定である。

証明:(1) $(f(\mathbf{r})/m)\mathbf{r}$ と $\mathbf{r}$ は平行だから $\mathbf{r}\times(f(\mathbf{r})/m)\mathbf{r}=0$ であり、$(\mathbf{r}\times\dot{\mathbf{r}})'=\dot{\mathbf{r}}\times\dot{\mathbf{r}}+\mathbf{r}\times\ddot{\mathbf{r}}=0+\mathbf{r}\times(f(\mathbf{r})/m)\mathbf{r}=0$ となる。即ち、$\mathbf{r}\times\dot{\mathbf{r}}$ は時間に関し定数ベクトルである。
(2) $\mathbf{K}=0$ ならば、$\mathbf{r}$ は $\dot{\mathbf{r}}$ に平行であり (1) より時間に関し定数だから、数 λ があって $\dot{\mathbf{r}}=\lambda\mathbf{r}$ である。これを用いると

$$\left(\frac{\mathbf{r}}{\|\mathbf{r}\|}\right)'=\frac{\dot{\mathbf{r}}\|\mathbf{r}\|^2-\mathbf{r}(\mathbf{r}\cdot\dot{\mathbf{r}})}{\|\mathbf{r}\|^3}=0$$

だから方向は一定となる。$\mathbf{K}\neq 0$ のとき、$\mathbf{r}$ は定ベクトル $\mathbf{K}$ に垂直であるから、原点を通り $\mathbf{K}$ に垂直な定平面上の運動になる。
(3) t を固定し

$$\mathbf{r}(t)=\overrightarrow{\mathrm{OP}},\quad \mathbf{r}(t+\Delta t)=\overrightarrow{\mathrm{OQ}},\quad \Delta\mathbf{r}=\mathbf{r}(t+\Delta t)-\mathbf{r}(t)=\overrightarrow{\mathrm{PQ}},$$

とおく。$\mathbf{r}(t)$ と $\Delta\mathbf{r}$ の成す角を θ とする。図形 OPQ の面積を ΔS とすると、時刻 t における面積速度は $\displaystyle\lim_{\Delta t\to+0}\frac{\Delta S}{\Delta t}$ で定義される。ここで、$\Delta t\to+0$ のとき $\Delta\mathrm{OPQ}/\Delta S\to 1$ であり、$\theta\to\phi=\mathbf{r}(t)$ と $\dot{\mathbf{r}}(t)$ の成す角 となるから

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta t\to+0}\frac{\Delta S}{\Delta t}&=\lim_{\Delta t\to+0}\frac{\Delta\mathrm{OPQ}}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to+0}\frac{\|\mathbf{r}\|\,\|\Delta\mathbf{r}\|\sin(\pi-\theta)}{2\Delta t}\\&=\frac{1}{2}\lim_{\Delta t\to+0}\|\mathbf{r}\|\,\Big\|\frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t}\Big\|\,\sin\theta=\frac{1}{2}\|\mathbf{r}\|\,\|\dot{\mathbf{r}}\|\,\sin\phi=\frac{1}{2}\|\mathbf{r}\times\dot{\mathbf{r}}\|=\frac{1}{2}\|\mathbf{K}\|\end{aligned}$$

[5] この主張は既に習って良く分かっていると言うことなので講義では省略

主張 2.1.5 3つの2変数関数により

$$S = \{P(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v)) \mid (u,v) \in D\}$$

となる集合を、曲面のパラメタ表示と言う。この曲面上の点を表す位置ベクトルを $\mathbf{r}(u,v)$ と書く。uv-平面の領域 D 上で

$$(*) \qquad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \neq 0$$

であると仮定する。このとき、以下が成立する：
(1) $\partial \mathbf{r}/\partial u \times \partial \mathbf{r}/\partial v$ は点 $\mathbf{r}(u,v)$ における S の法線ベクトルである。
(2) S の面積 $|S|$ は

$$|S| = \iint_D \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right| dudv$$

と与えられる。

図 11: 惑星運行：右半分に

証明：(u_0, v_0) を固定して、$P_0 = P(u_0, v_0)$ とおく。u の関数 $\mathbf{r}(u, v_0)$ は P_0 を通る S 上の一つの曲線を表す。これを P_0 における u-曲線と呼ぶ。

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}(u_0, v_0) = \left. \frac{d}{du}\mathbf{r}(u, v_0) \right|_{u=u_0}$$

はこの曲線の P_0 における接線ベクトルである。同様に P_0 における v-曲線が定義され、$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}(u_0, v_0)$ はこの曲線の P_0 における接線ベクトルである。
(1) $(*)$ により、$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}(u_0, v_0)$ と $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}(u_0, v_0)$ は平行ではなく

$$\left. \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right|_{(u_0, v_0)}$$

は、この2つの接線ベクトルに垂直であり、P_0 を通る曲面 S の一つの法線ベクトルを成す。
(2) uv-平面を長方形分割する。D に含まれる一つの長方形に対応する曲面 S 上の微少面分 $P_0\overset{\frown}{P_1 P_2}P_3$ を考え、その（曲）面積を ΔS とする。ここで $(u_0 + \Delta u, v_0)$,$(u_0 + \Delta u, v_0 + \Delta v)$,$(u_0, v_0 + \Delta v)$ に対応する点を P_1,P_2,P_3 とした。二つの無限小数 α, β に対し $\alpha = \beta(1 + \epsilon)$、$\epsilon \to 0$ となるとき $\alpha \sim \beta$ と書く。すると

$$\Delta S \sim \|\overrightarrow{P_0P_1} \times \overrightarrow{P_0P_3}\|,$$
$$\overrightarrow{P_0P_1} \sim \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}\Delta u, \quad \overrightarrow{P_0P_3} \sim \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\Delta v$$

となるから

$$\Delta S \sim \left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right\| \Delta u \Delta v, \quad dS = \left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right\| dudv.$$

定義 2.1.3 $f(x,y,z)$ を関数、$\mathbf{u}(x,y,z) = (u_1(x,y,z), u_2(x,y,z), u_3(x,y,z))$ をベクトル値関数とし、$\nabla = (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z})$ とおく。
(i) 勾配 *(gradient)* ベクトル*:*

$$\mathrm{grad}\, f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right) = \nabla f.$$

(ii) 発散率 *(divergence):*

$$\operatorname{div}\mathbf{u} = \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} + \frac{\partial u_3}{\partial z} = \nabla\cdot\mathbf{u}.$$

(iii) 回転 *(rotation)* ベクトル*:*

$$\operatorname{rot}\mathbf{u} = \left(\frac{\partial u_3}{\partial y} - \frac{\partial u_2}{\partial z}, \frac{\partial u_1}{\partial z} - \frac{\partial u_3}{\partial x}, \frac{\partial u_2}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial y}\right) = \nabla\times\mathbf{u}.$$

(iv) ラプラス作用素*:*

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \nabla^2 f = \nabla(\nabla f) = \nabla\cdot\operatorname{grad} f.$$

$\Delta f = 0$ となる関数を調和関数と言う。

例：これらの記号を用いるとき、$\mathbf{F} = (f, g, h)$ とし、$\mathbf{n}$ は曲面 ∂V の外向き単位法線ベクトルとして、Gauss の発散定理は

$$\iiint_V \operatorname{div}\mathbf{F} dxdydz = \iint_{\partial V} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n} dS$$

と表現される。

2.2 直線と平面のベクトル表示、平行なベクトル

定義 2.2.1 二つのベクトル $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3), \mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ $(\mathbf{u} \neq 0, \mathbf{v} \neq 0)$ が平行 $\mathbf{u}/\!/\mathbf{v}$ であるとは、ある数 λ があって $\mathbf{u} = \lambda\mathbf{v}$ となることをいう。

規約：零ベクトルはあらゆるベクトルに平行であるとみなす。

$$\mathbf{u}/\!/\mathbf{v} \Longleftrightarrow \exists(\lambda, \mu) \neq (0,0) \text{ s.t. } \lambda\mathbf{u} + \mu\mathbf{v} = 0 \Longleftrightarrow \mathbf{u}, \mathbf{v} \text{ は一次従属である}$$

平面の表示：$ax + by + cz = d$ を満たす点 (x_0, y_0, z_0) を一つ取ると

$$ax + by + cz = d \Longleftrightarrow a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0 \Longleftrightarrow {}^t(x - x_0, x - x_0, z - z_0) \perp {}^t(a, b, c)$$

だから $\{(x, y, z) \mid ax + by + cz = d\}$ は定ベクトル ${}^t(a, b, c)$ に直交している点の集合で、平面をなす。このとき、ベクトル ${}^t(a, b, c)$ はこの平面の法線ベクトルと呼ばれる。

直線の表示：点 (x_0, y_0, z_0) を通り方向 (l, m, n) を持つ直線はパラメタ $t \in \mathbb{R}$ を用いて

$$x = x_0 + lt,\ y = y_0 + mt,\ z = z_0 + nt, \quad t \in \mathbb{R}$$

と書ける。これからパラメタを消去すれば

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}$$

という表示になる。

2.2.1 接線と法線

平面曲線 $f(x, y) = 0$ の上の点 (x, y) における接線は

$$\{(X, Y) \mid f_x(x, y)(X - x) + f_y(x, y)(Y - y) = 0\},$$

法線は

$$\{(X,Y) \mid \frac{X-x}{f_x(x,y)} = \frac{Y-y}{f_y(x,y)}\} \quad 或いは \quad \{(x+f_x(x,y)t, y+f_y(x,y)t) \mid t \in \mathbb{R}\}.$$

例：２次曲線 $ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0$ 上の点 (x,y) における接線と法線は

$$\{(X,Y) \mid axX+h(yX+xY)+byY+g(X+x)+f(Y+y)+c=0\}, \quad \{(x+(ax+hy+g)t, y+(by+hx+f)t \mid t \in \mathbb{R}\}.$$

例えば、$x^2+y^2=1$ 上の点 $(0,1)$ における接線と法線は

$$\{(X,Y) \mid Y=1\}, \quad \{(0,1+t) \mid t \in \mathbb{R}\} = \{(X,Y) \mid \frac{X-x}{2x} = \frac{Y-y}{2y}\}.$$

平面の表示：$ax+by+cz=d$ を満たす点 (x_0,y_0,z_0) を一つ取ると

$$ax+by+cz=d \Longleftrightarrow a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0 \Longleftrightarrow {}^t(x-x_0, x-x_0, z-z_0) \perp {}^t(a,b,c)$$

だから $\{(x,y,z) \mid ax+by+cz=d\}$ は定ベクトル ${}^t(a,b,c)$ に直交している点の集合で、平面をなす。このとき、ベクトル ${}^t(a,b,c)$ はこの平面の法線ベクトルと呼ばれる。

直線の表示：点 (x_0,y_0,z_0) を通り方向 (l,m,n) を持つ直線はパラメタ $t \in \mathbb{R}$ を用いて

$$x = x_0 + lt,\ y = y_0 + mt,\ z = z_0 + nt, \quad t \in \mathbb{R}$$

と書ける。これからパラメタを消去すれば

$$\frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{n}$$

という表示になる。

2.2.2 接平面と法線

$F(x,y,z) = z - f(x,y)$ として上の曲面は $F(x,y,z)=0$ なる点 (x,y,z) の集まりと考えられる。この曲面 $S = \{(x,y,z) \mid F(x,y,z)=0\}$ の点 (x,y,z) における接平面 $T_{(x,y,z)}S$ は

$$\begin{aligned} T_{(x,y,z)}S &= \{(X,Y,Z) \in \mathbb{R}^3 \mid F_x(x,y,z)(X-x) + F_y(x,y,z)(Y-y) + F_z(x,y,z)(Z-z) = 0\} \\ &= \{(X,Y,Z) \in \mathbb{R}^3 \mid -f_x(x,y)(X-x) - f_y(x,y)(Y-y) + Z - z = 0\} \end{aligned}$$

で与えられる。また、この場合の点 (x,y,z) における法線 $\boldsymbol{\nu}_{(x,y,z)}$ は

$$\{(X,Y,Z) \mid \frac{X-x}{F_x(x,y,z)} = \frac{Y-y}{F_y(x,y,z)} = \frac{Z-z}{F_z(x,y,z)}\} = \{(x+tF_x(x,y,z), y+tF_y(x,y,z), z+tF_z(x,y,z)) \mid t \in \mathbb{R}\}$$

なる点 (X,Y,Z) の集合である。

注意：勝手に宣言しているようだが、日常生活における「接平面と法線」という概念と矛盾したりしないのか？　//

例：$F(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-1$ の場合を考える。$S^2 = \{(x,y,z) \mid F(x,y,z)=0\}$ と書く。$(0,0,1)$ では $(F_x,F_y,F_z)\big|_{(0,0,1)} = (0,0,1)$ となるから

$$T_{(0,0,1)}S^2 = \{(X,Y,Z) \in \mathbb{R}^3 \mid Z=1\}, \quad \boldsymbol{\nu}_{(0,0,1)} = \{(0,0,t) \mid t \in \mathbb{R}\}.$$

同様に

$$T_{(1/\sqrt{2},1/\sqrt{2},0)}S^2 = \{(X,Y,Z) \in \mathbb{R}^3 \mid X+Y=1\}, \quad \boldsymbol{\nu}_{(1/\sqrt{2},1/\sqrt{2},0)} = \{(1/\sqrt{2}+\sqrt{2}t, 1/\sqrt{2}+\sqrt{2}t, 0)t \in \mathbb{R}\}.$$

注意：$F(x,y,z)=0$ のとき、ある関数 $z=f(x,y)$ があって $F(x,y,f(x,y))=0$ とすることができるのか？例えば、$x^2+y^2+z^2=1$ の場合 $z=\pm\sqrt{1-x^2-y^2}$ となるが、これをどう考えれば良いのか？

一般にはこのような $z=f(x,y)$ を見い出すことは出来ないが、『もし $F(a,b,c)=0$ で $|F_z(a,b,c)|\neq 0$ なる点 (a,b,c) があれば、(a,b) の近くで定義された関数 f で、$c=f(a,b)$ かつ $F(x,y,f(x,y))=0$ となるものがある』これが陰関数の定理と呼ばれるものである。 //

曲面 $x=f(t,s), y=g(t,s), z=h(t,s)$ の点 (t,s) における接平面は

$$\begin{vmatrix} X-x & f_u & f_v \\ Y-y & g_u & g_v \\ Z-z & h_u & h_v \end{vmatrix} = \frac{\partial(g,h)}{\partial(t,s)}(X-x)+\frac{\partial(h,f)}{\partial(t,s)}(Y-y)+\frac{\partial(f,g)}{\partial(t,s)}(Z-z)=0$$

で、(t,s) における法線は

$$\frac{X-x}{\frac{\partial(g,h)}{\partial(t,s)}}=\frac{Y-y}{\frac{\partial(h,f)}{\partial(t,s)}}=\frac{Z-z}{\frac{\partial(f,g)}{\partial(t,s)}}.$$

で与えられる。

例：曲面 $F(x,y,z)=5z^2+4x^2y-6xz^2-3=0$ 上の 1 点 $(1,1,1)$ における接平面と法線は

$$F_x(1,1,1)=2,\ F_y(1,1,1)=4,\ F_z(1,1,1)=-2$$

だから

$$x+2y-z-2=0,\quad 2(x-1)=y-1=1-z \text{ i.e. } \{(1+2t,1+4t,1-2t)\mid t\in\mathbb{R}\}$$

と与えられる。

2.3 応用例

主張 2.3.1 *(i)* ベクトル値関数 $\mathbf{A}(\mathbf{r})=(A_1(\mathbf{r}),A_2(\mathbf{r}),A_3(\mathbf{r}))$ が、あるスカラー関数 $U(\mathbf{r})$ によって

$$\mathbf{A}(\mathbf{r})=-\mathrm{grad}\,U(\mathbf{r})$$

と表されているとする[6]。このとき点 P から点 Q への滑らかな経路 C に対し

$$\int_C \mathbf{A}(\mathbf{r})\cdot d\mathbf{r}=-(U(Q)-U(P)). \tag{1}$$

(ii) 質点 m が外力 $\mathbf{F}$ とポテンシャル力 $\mathbf{A}$ の力を受けながら運動しているとする。即ち、

$$m\ddot{\mathbf{r}}(t)=\mathbf{F}+\mathbf{A}.$$

m が点 P から点 Q まで経路 C に沿って移動したときの差は

$$\Delta\left(\frac{m}{2}v^2+U(\mathbf{r})\right)=\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}.$$

証明：(i) 定義に戻って計算すると

$$\begin{aligned}\mathrm{grad}\,U\cdot d\mathbf{r}&=\mathrm{grad}\,U\cdot\mathbf{r}'dt\\&=\left(\frac{\partial U}{\partial x}x'(t)+\frac{\partial U}{\partial y}y'(t)+\frac{\partial U}{\partial z}z'(t)\right)dt=\frac{dU(\mathbf{r}(t))}{dt}dt\end{aligned}$$

[6] U をポテンシャルという

(ii) 運動方程式の両辺と $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}(t)$ との内積を取ると

$$m\ddot{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{v} = \mathbf{F}\cdot\mathbf{v} + \mathbf{A}\cdot\mathbf{v} \tag{2}$$

となる。質点 m の軌跡を $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ とし、経路の始点 $P = \mathbf{r}(\alpha)$、終点 $Q = \mathbf{r}(\beta)$ とする。

$$(v^2)' = \frac{d}{dt}\|\dot{\mathbf{r}}\|^2 = 2\ddot{\mathbf{r}}\cdot\dot{\mathbf{r}}$$

に注意し(2) を $t = \alpha$ から $t = \beta$ まで積分すると

$$\frac{m}{2}v^2(\beta) - \frac{m}{2}v^2(\alpha) = \int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} + \int_C \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r}$$

となる。(1) を用いれば求める式が得られる。　　□

主張 2.3.2 *(i)* V を原点を含む直方体領域、$\mathbf{A} = (A_1, A_2, A_3)$ を V 上の C^1-級のベクトル値関数（V のベクトル場という）で $\mathrm{rot}\,\mathbf{A} = 0$ なるものとする。

$$U(x,y,z) = \int_0^x A_1(t,0,0)dt + \int_0^y A_2(x,t,0)dt + \int_0^z A_3(x,y,t)dt$$

とすると、U は $\mathbf{A} = \mathrm{grad}\,U$ を満たす。
(ii) 空間領域 V を原点に関し星形（即ち、原点と V 内の点を結ぶ線分がすべて V に含まれる）とするとき

$$U(x,y,z) = \int_0^1 \big[xA_1(xt,yt,zt) + yA_2(xt,yt,zt) + zA_3(xt,yt,zt)\big]dt$$

と定義する。U は $\mathbf{A} = \mathrm{grad}U$ を満たす。

主張 2.3.3 xyz-空間内の閉曲面 S で囲まれた領域の体積を V とすると

$$V = \frac{1}{3}\iint_S \mathbf{r}\cdot\mathbf{n}dS$$

となる。ここで $\mathbf{r} = (x,y,z)$ で、$\mathbf{n}$ は S の外向き単位法線である。

主張 2.3.4 閉曲面 S で囲まれた領域を D、φ, ψ を D を含む領域で定義された C^2-級関数とする。D の体積要素を $dV = dxdydz$、S の面積要素を dS と記すと、以下が成立する：

$$\iiint_D \Delta\varphi dV = \iint_S \frac{\partial\varphi}{\partial\mathbf{n}}dS, \tag{3}$$

$$\iint_S \varphi\frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{n}}dS = \iiint_D \big(\varphi\Delta\psi + (\nabla\varphi)\cdot(\nabla\psi)\big)dV, \tag{4}$$

$$\iint_S \left(\varphi\frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{n}} - \psi\frac{\partial\varphi}{\partial\mathbf{n}}\right)dS = \iiint_D \big(\varphi\Delta\psi - \psi\Delta\varphi\big)dV \tag{5}$$

但し、$\partial/\partial\mathbf{n}$ は S 上での外向き単位法線方向への偏微分である。

A　積分記号下での変数変換公式

A.1　2 変数の場合

定義 A.1.1 （*Jacobi* 行列）*(1)* uv-平面の集合 A 及びその上で定義された 2 つの C^1-級関数 ϕ と ψ を考え、uv-平面の集合 A から xy-平面への写像を $\Phi(u,v) = (\phi(u,v), \psi(u,v)) = (x,y)$ と定義する。この写像による A

の像を $B=\Phi(A)$ とし、A や B は面積を持つとする。
(2) 行列

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial\phi}{\partial u} & \frac{\partial\phi}{\partial v} \\ \frac{\partial\psi}{\partial u} & \frac{\partial\psi}{\partial v} \end{pmatrix}$$

を写像 Φ の *Jacobi* 行列、その行列式を Φ の *Jacobi* 行列式といい $J_\Phi(u,v)$、$J(u,v)$ 或いは $\partial(\phi,\psi)/\partial(u,v)$ と表示する。

定理 A.1.1 （変数変換公式）uv-平面の領域 A から xy-平面の領域 $B=\Phi(A)$ への C^1-級写像 Φ を考える。即ち、$\Phi(u,v)=(\phi(u,v),\psi(u,v))=(x,y)$, ϕ や ψ は C^1-級とする。A 上 Φ は1対1であり $J(u,v)\neq 0$ とする。この時、B 上で *Riemann* 可積分な関数 f に対し A 上の関数を $F(u,v)=f(\phi(u,v),\psi(u,v))$ と定めると、これは A 上で *Riemann* 可積分で

$$\iint_B f(x,y)dxdy=\iint_A F(u,v)|J(u,v)|dudv$$

となる。

記法：$f\circ\Phi(u,v)=F(\Phi(u,v))=f(\phi(u,v),\psi(u,v))$ として、上の公式を標語的に

$$\iint_A f\circ\Phi|J_\Phi(u,v)|dudv=\iint_{\Phi(A)} f(x,y)dxdy,\quad dxdy=|J_\Phi(u,v)|dudv$$

と書き表しておく。

例（極座標）:

$$x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta,\ (0\le r<\infty,\ 0\le\theta\le 2\pi)$$

は $(r,\theta)\in(0,\infty)\times[0,2\pi]\to(x,y)\in\mathbb{R}^2$ の写像を与え、その Jacobi 行列式は

$$J(r,\theta)=\det\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial\theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial\theta} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}=r$$

となる。

注意：原点 $r=0$ で Jacobi 行列式が 0 となり、そこでは積分記号下での変数変換公式がそのままでは成立しないので、積分を $(r,\theta)\in[0,\infty)$ での広義積分として解釈する。

A.2 多変数の場合

定理 A.2.1 D_1、D_2 をユークリッド空間 $\mathbb{R}^m$ の開集合とする。$h:D_1\to D_2$ を D_1 から D_2 への $1-1$ かつ上への写像で、h および h^{-1} は1階連続微分可能とし、

$$J_h(x)=\det\left(\frac{\partial h_i(x)}{\partial x_j}\right)=\frac{\partial(h_1,\cdots,h_m)}{\partial(x_1,\cdots,x_m)}$$

とする。$f(x)$ が D_2 上で積分可能となる必要十分条件は $f(h(x))|J_h(x)|$ が D_1 上で積分可能であり、更に

$$\iint_{D_2} f(x)dx=\iint_{D_1} f(h(x))|J_h(x)|dx$$

となる。

A.2.1　変数変換公式の証明

(以下の証明は J.T. Schwartz[4] による。) まず、$x=(x_1,x_2,\cdots,x_m)\in\mathbb{R}^m$ に対し以下 $\mathbb{R}^m$ 上の変換 δ_λ, τ, ρ_{ij} を定める：

$$\delta_\lambda x=\delta_\lambda(x_1,x_2,\cdots,x_m)=(\lambda x_1,x_2,\cdots,x_m),\quad \lambda\in\mathbb{R}$$
$$\tau x=\tau(x_1,x_2,\cdots,x_m)=(x_1+x_2,x_2,\cdots,x_m),$$
$$\rho_{ij}x=\rho_{ij}(x_1,\cdots,x_i,\cdots,x_j,\cdots,x_m)=(x_1,\cdots,x_j,\cdots,x_i,\cdots,x_m).$$

それぞれについて、$f(x)\in C_0(\mathbb{R}^m)$、$g(x)\in C_0(\mathbb{R})$ とするとき、以下の積分公式が成立する。

$$|\det(\delta_\lambda)|\iint_{\mathbb{R}^m}f(\delta_\lambda x)dx=\iint_{\mathbb{R}^m}f(x)dx,$$
$$\iint_{\mathbb{R}^m}f(\sigma x)dx=\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}f(x_1,x_2,\cdots,x_m)dx_1\cdots dx_m,$$
$$\iint_{\mathbb{R}^m}f(\rho_{ij}x)dx=\iint_{\mathbb{R}^m}f(x)dx.$$

（証）Fubini の定理を用い逐次積分に書き換え、１変数積分の

$$|\lambda|\int_{-\infty}^{\infty}g(\lambda y)dy=\int_{-\infty}^{\infty}g(y)dy$$

を用い、最後に再度 Fubini の定理を用いれば

$$\begin{aligned}|\det(t_\lambda)|\iint_{\mathbb{R}^m}f(\delta_\lambda x)dx&=|\lambda|\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}f(\lambda x_1,x_2,\cdots,x_m)dx_1\cdots dx_m\\&=\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}f(x_1,x_2,\cdots,x_m)dx_1\cdots dx_m\\&=\iint_{\mathbb{R}^m}f(x)dx.\end{aligned}$$

Fubini の定理を用い逐次積分に書き換え、１変数積分の任意の z に対して

$$\int_{-\infty}^{\infty}g(y+z)dy=\int_{-\infty}^{\infty}g(y)dy$$

となることを用い、最後に再度 Fubini の定理を用いれば

$$\begin{aligned}\iint_{\mathbb{R}^m}f(\tau x)dx&=\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}f(x_1+x_2,x_2,\cdots,x_m)dx_1\cdots dx_m\\&=\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}f(x_1,x_2,\cdots,x_m)dx_1\cdots dx_m.\end{aligned}$$

Fubini の定理より、多重積分は（積分順序をどうとったにしろ）逐次積分と等しいから、

$$\begin{aligned}\iint_{\mathbb{R}^m}f(\rho_{ij}x)dx&=\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}f(x_1,\cdots,x_j,\cdots,x_i,\cdots,x_m)dx_1\cdots dx_i\cdots dx_j\cdots dx_m\\&=\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}f(x_1,\cdots,x_i,\cdots,x_j,\cdots,x_m)dx_1\cdots dx_j\cdots dx_i\cdots dx_m\\&=\iint_{\mathbb{R}^m}f(x)dx.\qquad\text{（証）}\square\end{aligned}$$

さて、$x\in\mathbb{R}^m$ に対してノルムを $|x|=\max_{1\le j\le m}|x_j|$ とし、線形写像 $A=(a_{jk}):\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^m$ に対し、そのノルムを $|A|=\max_{1\le i\le m}\sum_{j=1}^m|a_{ij}|$ と定義する。すると、$|Ax|\le|A||x|$ となる。また、

$$j_{ik}(x)=\frac{\partial h_i(x)}{\partial x_k},\quad J(x)=J_h(x)=(j_{ik}(x))$$

とおく。

S をユークリッド空間 $\mathbb{R}^m$ の集合でその体積を $\mu(S)$ と書くことにする。$C=\{x\in\mathbb{R}^m \mid |x-p|\le s\}$ を中心 p、一辺 $2s$ の立方体とする。このとき $\mu(C)=(2s)^n$ である。平均値の定理から

$$h_i(x)-h_i(p)=\sum_{k=1}^{m} j_{ik}(p+\theta_i(x)(x-p))(x_k-p_k),\quad \theta_i(x)\in[0,1]$$

と書けるので、

$$|h(x)-h(p)|\le s\max_{y\in C}|j(y)|;$$

となる。即ち、$h(C)$ は

$$|z-h(p)|\le s\max_{y\in C}|j(y)|$$

なる立方体に含まれ、

$$\mu(h(C))\le\{\max_{y\in C}|j(y)|\}^m\mu(C)$$

となる。この式を、A を正則な線形写像とし、任意の閉集合 S に対し適用し

$$\mu(A^{-1}(S))=|\det(A^{-1})|\mu(S)$$

が導かれる。実際、この式は h を線形写像、関数

$$f(x)=\begin{cases}1 & (x\in A^{-1}(S)),\\ 0 & (x\notin A^{-1}(S))\end{cases}$$

に対し定理を適用すればよいし、それはすでに示した。

これを $S=h(C)$ に適用する。C は閉集合で有界であり h は連続だから $h(C)$ は閉である。故に任意の正則な線形写像 A に対し

$$|\det(A^{-1})|\mu(h(C))\le\{\max_{y\in C}|A^{-1}j(y)|\}^m\mu(C)$$

となるから、

$$|\mu(h(C))\le|\det(A)|\{\max_{y\in C}|A^{-1}j(y)|\}^m\mu(C) \tag{6}$$

が求まる。さて、立方体

$$C=\sum_{k=1}^{M}C_k,\quad C_j\cap C_k=\emptyset\ (j\ne k)$$

と有限個に分解し、C_k の中心を x_k とし、それらの辺の最大値を δ とする。

$$\mu(h(C))\le\sum_{k=1}^{M}|\mu(h(C_k))|\le\sum_{k=1}^{M}|\det(j(x_k))|\{\max_{y\in C_k}|j^{-1}(x_k)j(y)|\}^m\mu(C_k) \tag{7}$$

一方、$j(x)$ は行列値の連続関数だから、$z\to y$ のとき

$$j^{-1}(z)j(y)\to\mathbb{I}_m$$

となる。故に $\lim_{\delta\to0}\eta(\delta)=0$ となる $\eta(\delta)$ があって、

$$\{\max_{y\in C_k}|j^{-1}(x_k)j(y)|\}^m\le1+\eta(\delta)$$

となる。これより、δ が十分小さいとき

$$\mu(h(C))\le[1+\eta(\delta)]\sum_{k=1}^{M}|\det(j(x_k))|\mu(C_k)$$

が分かる。さて $\delta \to 0$ とすると、積分の定義から

$$\mu(h(C)) \leq \iint_C |J_h(x)|dx$$

となる。再度、積分の定義に戻って考えると、ただちに

$$\iint_{D_2} f(x)dx \leq \iint_{D_1} f(h(x))|J_h(x)|dx \tag{8}$$

となる。(8) を写像 h^{-1} に対して適用して

$$\iint_{D_2} f(x)dx \leq \iint_{D_1} f(h(x))|J_h(x)|dx \leq \iint_{D_2} f(h^{-1}(h(x)))|J_h(h^{-1}(x))J_{h^{-1}}(x)|dx$$

となる。$J_h(h^{-1}(x))J_{h^{-1}}(x) = 1$ となることに注意すれば、$f(x) \in C_0(\mathbb{R}^m)$ に対し、望みの公式が得られたことになる。 $\square$

参考文献

[1] 岩堀長慶編:「微分積分学」裳華房, 1984.

[2] 金子晃: 「数理系のための基礎と応用微分積分 II–理論を中心に–」サイエンス社, 2001.

[3] 金子晃:「線形代数講義」サイエンス社, 2004.

[4] J.T. Schwartz: *The formula for change in variables in a multiple integral*, Amer.Math.Monthly, 61(1954), pp. 81-85.

[5] 杉浦光夫:「解析入門 I, II」 東京大学出版会, 1980, 1985.

[6] 吹田信之、新保経彦:「理工系の微分積分学」 学術図書出版社, 1987.

[7] 高木貞治:「解析概論」(軽装版) 岩波書店, 1983.