「微分積分学第2」問題解答例（一部）–級数と整級数

2005年度V類T組　　井上　淳　2006.2.3.

級数と整級数

記述を簡単にするために、２つの数列 a_n, b_n に対し $\lim_{n\to\infty} a_n/b_n = 1$ なるとき $a_n \sim b_n$ と記す。このとき、$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ の収束、発散は $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ の収束、発散と軌を一にする。

0.1　収束、発散１

(1) 収束

$$\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\frac{n^n}{n!} = \frac{n^n}{(n+1)^n} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n} \to e^{-1}(<1) \quad (n\to\infty).$$

(2) 収束： 任意の $\epsilon > 0$ に対し $n^{-\epsilon}\log n \le M$ なるから

$$\frac{\log n}{n^2} = n^{-\epsilon}\log n\,\frac{1}{n^{2-\epsilon}} < \frac{M}{n^{2-\epsilon}}.$$

(3) 収束

$$\frac{((n+1)!)^2}{(2(n+1))!}\frac{(2n)!}{(n!)^2} = \frac{n+1}{2(2n+1)} \to \frac{1}{4}.$$

(4) 発散

$$\frac{1}{an+b} \sim \frac{1}{an}.$$

(5) 収束: $\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + R(x)(-1 \le x \le 1)|R(x)| \le Cx^3$ より

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\log\left(1+\frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{\sqrt{n}}(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2}).$$

(6) 収束:

$$\frac{(n+1)^\alpha}{(n+1)!}\frac{n!}{n^\alpha} = \frac{(1+\frac{1}{n})^\alpha}{n+1} \to 0.$$

(7)

$$\left(\frac{cn+d}{an+b}\right)^n = \left(\frac{c}{a}\right)^n\left(\frac{1+d/(cn)}{1+b/(an)}\right)^n \to \begin{cases} \text{級数は収束} & c<a \\ \text{級数は発散} & c \ge a \end{cases}$$

(8) 収束:

$$\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n} = \frac{1}{n(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})} \sim \frac{2}{n^{3/2}}$$

(9) $\alpha > 2$ ならば収束、$\alpha \le 2$ ならば発散：

$$\sqrt{n^\alpha+1} - \sqrt{n^\alpha-1} = \frac{1}{\sqrt{n^\alpha+1}+\sqrt{n^\alpha-1}} \sim \frac{1}{n^{\alpha/2}}.$$

0.2　収束・発散 2

(1) Taylor 展開より

$$\log\Bigl(1+\frac{1}{n^2}\Bigr)=\frac{1}{n^2}-\frac{1}{2n^4}+O(\frac{1}{n^6}).$$

故に、$\alpha>-1$ ならば収束、$\alpha\le -1$ ならば発散（「$\alpha\le -2$ ならば発散」とあったのを修正！）。

(2) (a) 収束

$$\frac{(n+1)^{n+1}(n+1)!}{(2(n+1))!}\frac{(2n)!}{n^n n!}=\Bigl(1+\frac{1}{n}\Bigr)^n\frac{n+1}{4n+2}\to\frac{e}{4}(<1).$$

(b) 収束

$$e^x-1=x+\frac{x^2}{2!}+0(x^3)$$

より

$$e^{n^{-2}}-1=n^{-2}+0(n^{-4}).$$

(3) 関数 $f(x)=\frac{1}{x(\log\ x)^p}$ は単調減少、

$$\int_1^\infty f(x)dx=\int_0^\infty\frac{dy}{y^p}=\begin{cases}\text{収束}\quad p>1\ \text{のとき}\\ \text{発散}\quad p\le 1\ \text{のとき}\end{cases}$$

だから級数 $\sum_{n=1}^\infty f(n)$ の収束・発散も同様に成立。

0.3　整級数

(1) $\displaystyle\sum_{n=0}^k x^n=\frac{x^{k+1}-1}{x-1}\quad(x\ne 1)$ を x に関して微分すると

$$\sum_{n=1}^k nx^{n-1}=\frac{kx^{k+1}-(k+1)x^k+1}{(x-1)^2}.$$

$|x|<1$ のとき $\lim_{n\to\infty}nx^n=0$ だから

$$\lim_{k\to\infty}\sum_{n=1}^k nx^n=\frac{x}{(x-1)^2}.$$

(2) (i) 収束半径 $=1/2$

$$\frac{2^{n+1}+n+1}{2^n+n}=\frac{2+(n+1)2^{-n}}{1+n2^{-n}}\to 2.$$

(ii) 収束半径 $=\infty$

$$\frac{1}{(n+1)^{n+1}}n^n=\Bigl(1+\frac{1}{n}\Bigr)^n\frac{1}{n+1}\to 0.$$

(3)

$$\frac{1}{1-3x+2x^2}=\frac{1}{1-2x}+\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^\infty(2x)^n+\sum_{n=0}^\infty x^n=\sum_{n=0}^\infty(1+2^n)x^n.$$

より、収束半径 $=1/2$

注意：級数の Cauchy や d'Alembert による判定法は、本質的には等比級数との比較であるから、等比級数より収束の遅い級数、$\sum 1/n^p$ 等、には適用できない。Gauss の判定法は、$a_n/a_{n-1}<1,\ a_n/a_{n-1}\to 1$ となる場合、「判定比を漸近展開してみる」というものであった。