「微分積分学第2」J.U.-問題2-3　　2005年度V類T組

井上　淳　2006.1.5.

0.1　収束、発散1

次の級数の収束、発散を調べよ。

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}$,　(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\log n}{n^2}$,　(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}$,　(4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{an+b}$　$(a>0,\ b>0)$,

(5) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\log\left(1+\frac{1}{n}\right)$,　(6) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{\alpha}}{n!}$,　(7) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{cn+d}{an+b}\right)^n$　$(a,b,c,d>0)$,

(8) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n}$,　(9) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\sqrt{n^{\alpha}+1}-\sqrt{n^{\alpha}-1}\right\}$　$(\alpha>0)$,

(10) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{1+n^{\alpha}}$　$(\alpha>0)$,　(11) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n}}{\sqrt{n}}$,　(12) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n^3+1}-\sqrt{n^3-1}\right)$,

(13) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\log\left(1+\frac{1}{n}\right)\right\}^2$,　(14) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{(-1)^{n-1}}{n}\right)$,　(15) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{\alpha}}{n^{\beta}+1}$,

(16) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(\log(n+1))^n}$.

0.2　収束・発散2

(1) α を実数とする。級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}\log\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$ の収束・発散を調べよ。

(2) 次の級数の収束・発散を調べよ。

(a)　$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n\,n!}{(2n)!}$,　(b)　$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\exp\left(\frac{1}{n^2}\right)-1\right)$

(3) 級数 $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\log n)^p}$ は $p>1$ のとき収束し、 $p\le 1$ のとき発散することを示せ。

0.3　整級数

(1) $\displaystyle\sum_{n=0}^{k}x^n=\frac{x^{k+1}-1}{x-1}$　$(x\neq 1)$ を x に関して微分せよ。また $|x|<1$ のとき $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}nx^n$ が収束することを示し, その値を求めよ。(前半部分の代わりに $\lim_{n\to\infty}nx^n=0$　$(|x|<1)$ とせよ。)

(2) 次の整級数の収束半径を求めよ.

(i)　$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(2^n+n)\,x^n$,　(ii)　$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^n}$

(3) 関数 $\dfrac{1}{1-3x+2x^2}$ を $x=0$ を中心とする整級数に展開し，その収束半径を求めよ.