「微分積分学第 2」重積分と級数の問題

2005 年度 V 類 T 組　2005.12.09. 配付

以下は J.U. 氏が収集し、或いは作った問題である。中間試験にはこの中からか、それのちょっと変形したものが出題されるであろう。各自解いて、TeX を用いてプリントアウトすると、ちょっと新しい気分になるかもしれない。（TeX の使用法はできるだけ早く学んでおくと得をすること受け合い。最初は面倒なので TeX ができる人達と一緒のコンピュータ室で学ぶことを勧める）

重積分とその応用

1. 以下の重積分を計算せよ。

(1) $$\iint_D (x+y+1)^2 dxdy, \quad D = \{(x,y) \mid 0 \le y \le 1-x,\ x \ge 0\}$$

(2) $$\iint_D \frac{dxdy}{\sqrt{1-x^2-y^2}}, \qquad D = \left\{(x,y) \mid x^2+y^2 \le 1\right\}$$

(3) $$\iint_D e^{-(x^2+y^2)}\, dxdy, \qquad D = \{(x,y) \mid x \ge 0,\ y \ge 0\}$$

(4) $$\iint_D \frac{x+y}{x^2+y^2}\, dxdy, \qquad D = \{(x,y) \mid 0 \le y \le x \le 1\}$$

(5) $$\iint_D \log(x^2+y^2)\, dxdy, \qquad D = \left\{(x,y) \;\middle|\; 1 \le x^2+y^2 \le 4 \right\}$$

(6) $$\iint_{\sqrt{x}+\sqrt{y} \le 1} x\, dxdy$$

(7) $$\iint_D (x-y)^2\sqrt{1-(x+y)^2}\, dxdy, \qquad D = \left\{(x,y) \;\middle|\; |x+y| \le 1, |x-y| \le 1 \right\}$$

2. ガンマ関数とベータ関数

ガンマ関数　$\Gamma(x)$、ベータ関数　$B(x,y)$　は、次式で定義された関数である。

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}dt \qquad (\,x>0\,), \qquad B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\, dt \qquad (\,x>0,\ y>0\,)$$

ガンマ関数とベータ関数の間には、次の関係がある。

$$B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} \qquad (\,x>0,\, y>0\,)$$

(1) $B\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) = \pi$　を証明せよ。

(2) $\Gamma(1)$　および　$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$　の値を求めよ。

(3)　$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x) \qquad (\ x > 0\ )$　を証明せよ。

(4)　$\displaystyle\int_0^1 \frac{x^{\frac{3}{2}}(1-x)^{-\frac{1}{2}}}{(x+1)^3}\,dx = \frac{\sqrt{2}}{8}B\left(\frac{5}{2},\frac{1}{2}\right) = \frac{3\sqrt{2}}{64}\pi$　を証明せよ。(Hint : $\dfrac{2x}{x+1} = t$　とおけ)

3．曲面積、体積

(1)　$a > 0$ を定数とする。円柱 $x^2+y^2 \leq ax$ と球 $x^2+y^2+z^2 \leq a^2$ の共通部分の体積を求めよ。

(2)　$\sqrt{x}+\sqrt{y} = 1$ と $4xy = z^2$ とで囲まれる部分の体積を求めよ.

(3)　$\sqrt{x}+\sqrt{y} = a$ と $4xy = z^2$ とで囲まれる部分の体積が 1 となるように正の定数 a を定めよ.

(4) 空間内の図形

$$V = \left\{\ (x,y,z)\ \middle|\ x+y \leq 1,\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ 0 \leq z \leq \sqrt{2xy}\ \right\}$$

の体積を求めよ。

(5) $a > 0$ を定数とする。円柱面 $x^2+y^2 = a^2$ と 2 平面 $x+z = a,\ z = 0$ で囲まれた立体の体積を求めよ。

級数と整級数

以下は、12 月 15 日の中間試験には出題しないが、期末試験には採用するかもしれない！

1．収束、発散 1

次の級数の収束、発散を調べよ。

(1)　$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}$,　(2)　$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\log n}{n^2}$,　(3)　$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}$,　(4)　$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{an+b}$　$(a > 0,\ b > 0)$,

(5)　$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\log\left(1+\frac{1}{n}\right)$,　(6)　$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^\alpha}{n!}$,　(7)　$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{cn+d}{an+b}\right)^n$　$(a,b,c,d > 0)$,

(8)　$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n}$,　(9)　$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\sqrt{n^\alpha+1}-\sqrt{n^\alpha-1}\right\}$　$(\alpha > 0)$

(10)　$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{1+n^\alpha}$　$(\alpha > 0)$,　(11)　$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n}}{\sqrt{n}}$,　(12)　$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n^3+1}-\sqrt{n^3-1}\right)$

(13)　$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\log\left(1+\frac{1}{n}\right)\right\}^2$,　(14)　$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{(-1)^{n-1}}{n}\right)$,　(15)　$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^\alpha}{n^\beta+1}$

(16)　$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(\log(n+1))^n}$

2．収束・発散 2

(1) α を実数とする。級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} \log\Big(1+\frac{1}{n^2}\Big)$ の収束・発散を調べよ。

(2) 次の級数の収束・発散を調べよ。

$$(a) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n\, n!}{(2n)!}, \qquad (b) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\exp\left(\frac{1}{n^2}\right) - 1\right)$$

(3) 級数

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)^p}$$

は $p > 1$ のとき収束し、 $p \leq 1$ のとき発散することを示せ。

3. 整級数

(1) $\displaystyle\sum_{n=0}^{k} x^n = \frac{x^{k+1}-1}{x-1} \quad (x \neq 1)$ を x に関して微分せよ。また $|x| < 1$ のとき $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} nx^n$ が収束することを示し, その値を求めよ。(前半部分の代わりに $\lim_{n\to\infty} nx^n = 0 \quad (|x| < 1)$ とせよ。)

(2) 次の整級数の収束半径を求めよ.

$$(i) \qquad \sum_{n=0}^{\infty} (2^n + n)\, x^n, \qquad (ii) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^n}$$

(3) 次の関数を $x = 0$ を中心とする整級数に展開し，その収束半径を求めよ.

$$\frac{1}{1-3x+2x^2}.$$