

微分積分学第二 V類T組 第1回講義内容 (2005年10月06日) 井上淳

今学期の講義内容

1. 復習 (1変数関数の積分)
2. 2変数関数の積分
3. 広義積分: 1変数と2変数
4. 積分記号下の変数変換公式
5. 計算例
6. ベクトル解析をちょっと
7. 数列の収束
8. $\epsilon - N$ 論法と $\epsilon - \delta$ 論法
9. 級数の収束判定法
10. 冪級数について

答案返却: 受験者数 108, 平均点 67/100, 落第率 14.8%, この期末試験の解答例と成績優秀者の名前が、前学期の講義録の中に載っている。また、落第率がこの程度だったので「追試験はしない」。

但し、前学期の落第者もこの微積分第二の成績が良ければ、その人には前学期の単位を与えることを宣言した(成績が良いとは、例えば、微積分第一期末得点+微積分第二期末得点が60点を越えればということで、そのようなとき、微積分第一得点を60点と書き換える操作を教務課に申請する)。

7 復習: 1変数関数の積分法

有界閉区間 $[a, b]$ 上の有界な関数 $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ を考える。といったところで、『「有界」って何ですか?』という質問があった。

まず思い出そう。

数列 $\{a_n\}$ が有界である とは、ある数 $M > 0$ があって、任意の n に対して $|a_n| \leq M$ となることである。

(i) $a_n = 1/n$ は $M = 1$ ととれば任意の n に対して $1/n \leq 1$ となるから有界である。(ii) $b_n = n$ はどうだろうか?

数列 $\{a_n\}$ が有界でない とは、どんな数 N に対しても、ある整数 n_0 があって $|a_{n_0}| > N$ となる。

実数直線上の集合 A が有界である とは、ある数 $M > 0$ があって、任意の $a \in A$ に対して $|a| \leq M$ となることである。

$-\infty < a < b < \infty$ に対して

$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$ 閉区間, $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$ 開区間, $(a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$ 左半開

等という。 $a_n = 1/n$ は $[0, 1]$ にも $(0, 1]$ にも属しているが、 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ だから $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \in [0, 1]$ だが $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \notin (0, 1]$ である。前の定理『有界閉区間 $[a, b]$ 上の連続関数は $[a, b]$ 上で最大値と最小値を持つ』に『有界開区間』ではなく『有界閉区間』なる「条件」が使われている。

定義 7.1 $[a, b]$ 上の実数値関数 f が Riemann 可積分で積分値 A を持つとは、任意の $\epsilon > 0$ に対して $\delta > 0$ が

あって、 $[a, b]$ の分割 \mathcal{D} と目印点 Ξ を

$$\mathcal{D} : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b \quad \text{と} \quad \Xi = \{\xi_1, \dots, \xi_n\} \quad \text{を} \quad x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i, \quad \max_{i=1, \dots, n} (x_i - x_{i-1}) < \delta \quad (1)$$

なるようにとると

$$\left| \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) - A \right| < \epsilon$$

となることをいう。 $A = \int_a^b f dx$, 或いは $A = \int_a^b f(x)dx$ 等と記す。

注意：上の

$$S(f; \mathcal{D}, \Xi) = \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$$

を Riemann 和と呼ぶ。

定義 7.2 (Riemann) 有界閉区間 $[a, b]$ で定義された有界な関数 f が、 $\underline{R}(f) = \overline{R}(f)$ を満たすとき Riemann 可積分と言う。即ち、ある数値 I をとると、任意の $\epsilon > 0$ に対し、ある $\delta > 0$ があって、 $|\Delta| < \delta$ となる任意の分割 Δ と任意の目印点 $\Xi = \{\xi_k\} (\xi_k \in I_k)$ に対し

$$|S(f, \Delta, \Xi) - I| < \epsilon$$

となる。この数 I は $\underline{R}(f) = \overline{R}(f)$ であり、それを $\int_a^b f(x)dx$ と表示する。

問：しかし、ここで書いた $\lim_{|\Delta| \rightarrow 0} \overline{R}(f, \Delta)$ とはどう解釈したらよいのであろうか？

定義 7.3 有界閉区間 $[a, b]$ 上の有界関数 f 、及び区間の分割(1) Δ に対し次の量を導入する：

$$M_j = \sup_{y \in [x_{j-1}, x_j]} f(y), \quad m_j = \inf_{y \in [x_{j-1}, x_j]} f(y), \quad \Delta_j = |x_j - x_{j-1}|, \quad (2)$$

$$\overline{R}(f, \Delta) = \sum_{j=1}^N M_j \Delta_j, \quad \underline{R}(f, \Delta) = \sum_{j=1}^N m_j \Delta_j. \quad (3)$$

ここから先は 1 学期の 2005 年 6 月 20 日第 9 回講義内容をもう一度見て欲しい。積分の基本的な性質として

1. 線型性
2. 正值性
3. 区間に関する加法性
4. 微分積分の基本定理
5. 積分の平均値の定理
6. 置換積分と部分積分

があり、それらを用いて、具体的な積分の数値を求めることができた。

=====

メモ：前学期の大きなハイテク装備の教室は極めて使いにくかったし評判も悪かった。そこで、今学期は講義収容人員 80 名の S511 にしたが、ここは黒板が極めて小さい。少なくとも今日は満員だった。