微分積分学第二　Ｖ類Ｔ組 第４回講義内容（2005年10月27日）井上淳

今回は授業途中で答案用紙に計算してもらいそれを回収した。不本意であるが、今後、授業中に小テストをするなり、講義のレポートも課して、数学へ割く時間を確保せざるを得ないようにする！

7　１変数関数の積分法（復習）

8　不定積分、そして微分方程式（復習省略）

9　２変数関数の積分法

9.1　長方形閉領域での重積分について

9.2　より一般的な領域での重積分

9.3　定積分の性質

計算の仕方：もう一度説明と実践　方法論としては、Fubini の定理を用いて重積分を累次積分に帰着したり累次積分を重積分に直し積分順序を変更する、その際に、積分記号下での座標変換をして Fubini の定理が適用し易いようにする、その累次積分に微分積分の基本定理や部分積分を適用して計算を遂行する等々。

前回もはっきり表明しなかったので、簡単な場合について Fubini の定理を述べておく：

定理 9.1 *(i)* ϕ_1, ϕ_2 を連続とし、$D = \{(x,y) \mid a \le x \le b,\ \phi_1(x) \le y \le \phi_2(x)\}$ を定める。D 上の連続関数 $f(x,y)$ に対し

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_a^b \left(\int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x,y)dy \right) dx.$$

(ii) ψ_1, ψ_2 を連続とし、$D' = \{(x,y) \mid c \le y \le d,\ \psi_1(y) \le x \le \psi_2(y)\}$ を定める。D' 上の連続関数 $f(x,y)$ に対し

$$\iint_{D'} f(x,y)dxdy = \int_c^d \left(\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx \right) dy.$$

教科書 pp.119-120 近辺をまず説明し、会議の為（会議が講義に優先するとは！）に講義を中断せざるを得ないので、その間は以下の問題を計算して貰った。

p.119 の例 8-7 (1) の説明：

$$\iint_D x\sqrt{y}dxdy, \quad D = \{(x,y) \mid 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le x^2\}$$

の計算方法を示した。ポイントは領域 D を図示し、上の定理を用いて、どういう順序で積分するか明確にすることである。黒板ではまず

$$\iint_D x\sqrt{y}dxdy = \int_0^1 \left(\int_0^{x^2} x\sqrt{y}dy \right) dx = \int_0^1 x \left(\int_0^{x^2} \sqrt{y}dy \right) dx$$

とし、$d(y^{3/2})/dy = 3/2\sqrt{y}$ なることより

$$\int_0^{x^2} \sqrt{y}dy = \frac{2}{3}y^{3/2}\Big|_{y=0}^{x^2} = \frac{2x^3}{3}$$

であり

$$\iint_D x\sqrt{y}dxdy = \int_0^1 \frac{2x^4}{3}dx = \frac{2}{15}.$$

勿論、$y = z^2$ と変数変換して $\int_0^{x^2} \sqrt{y}dy$ を計算してもよい。

問：$\iint_D x\sqrt{y}dxdy$ から累次積分に変換するとき、先に x について積分し後に y について積分してみよ。

答：各 y にたいし、領域の x 座標は $\sqrt{y}$ から 1 まで動くから

$$\iint_D x\sqrt{y}dxdy = \int_0^1 \left(\int_{\sqrt{y}}^1 x\sqrt{y}dx\right)dy = \int_0^1 \sqrt{y}(\frac{1}{2} - \frac{y}{2})dx = \frac{1}{3} - \frac{1}{5} = \frac{2}{15}.$$

問（積分の計算）：

$$\iint_D \frac{x}{y^2}dxdy, \qquad D = \{(x,y) \mid 1 \le y \le x^2,\ 2 \le x \le 4\},$$
$$\iint_D x^2ydxdy, \qquad D = \{(x,y) \mid 0 \le x \le \pi,\ 0 \le y \le \sin x\}.$$

答：

$$\iint_D \frac{x}{y^2}dxdy = \int_2^4 \left(\int_1^{x^2} \frac{x}{y^2}dy\right)dx = \int_2^4 \left[-\frac{x}{y}\right]_1^{x^2} dx = \int_2^4 \left(x - \frac{1}{x}\right)dx = 6 - \log 2.$$

$$\iint_D x^2ydxdy = \int_0^\pi \left(\int_0^{\sin x} x^2ydy\right)dx = \int_0^\pi x^2\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^{\sin x} dx = \frac{1}{2}\int_0^\pi x^2sin^2xdx = \frac{\pi^3}{12} - \frac{\pi}{8}.$$

問（積分順序の変更して積分値を求めよ）：

$$\int_1^2 \left(\int_{1/x}^2 ye^{xy}dxdy\right)dx.$$

答：積分領域を図示し間違えないようにして、積分順序を変更する。

$$\int_1^2 \left(\int_{1/x}^2 ye^{xy}dxdy\right)dx = \int_{1/2}^1 \left(\int_{1/y}^2 ye^{xy}dx\right)dy + \int_1^2 \left(\int_1^2 ye^{xy}dx\right)dy$$
$$= \int_{1/2}^1 \left[e^{xy}\right]_{1/y}^2 dy + \int_1^2 \left[\int_1^2\right]_1^2 dy = \int_{1/2}^1 (e^{2y} - e)dy + \int_1^2 (e^{2y} - e^y)dy = \frac{e^2}{2}(e^2 - 2).$$

以下の問は出題し忘れた。各自考えておいて欲しい。

問題（広義積分絡みの Riemann 和の極限）：$\lim_{n\to\infty} \left\{\frac{n!}{n^n}\right\}^{1/n}$ を求めよ。

==

メモ：最初 17 名、回答用紙提出数 43。聞くとこのクラスの人は 1 時限目が無くつい出席もとらないこの授業への足が遠のくとのこと。それゆえ、最初に記した小テストとかレポートを時々課すことにする。