2005年度 V類T組　微分積分学第2中間試験問題

2005.12.15. 井上淳

● 問題は2題、6小問、答案用紙は４枚綴りである。バラバラになったときは、左上角を折るなりしておいて欲しい。問題毎に区別されていれば答案の記述順は問わないが、良く整理して答案を記入して欲しい。万が一紙が不足した場合は、その旨を明記し、裏にも解答して良い。

● 授業や演習に関する物言い（助言、苦情等）感想を是非記して下さい（試験後１週間以内に e-mail で私宛に送ってくれるのがもっとも望ましい）。それによってボーダーライン付近の点が増えることがあっても、減ることはない！

＝＝＝＝＝＝

$\boxed{1}$ 以下の重積分の値を求めよ（計算過程も明示せよ）。

$$(i)\quad \iint_{D_1} (x-y)^2\sqrt{1-(x+y)^2}dxdy, \qquad D_1 = \left\{(x,y)\ \middle|\ |x+y|\le 1, |x-y|\le 1\right\},$$

$$(ii)\quad \iint_{D_2} x\,dxdy, \qquad D_2 = \left\{(x,y)\ \middle|\ \sqrt{x}+\sqrt{y}\le 1\right\}.$$

$\boxed{2}$ $x>0,\ y>0$ に対して、二つの関数を以下で定義する。

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}dt, \qquad B(x,y) = \int_0^1 s^{x-1}(1-s)^{y-1}\,ds.$$

このとき、以下に答よ。但し、$B(x,y) = \dfrac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$ となることを用いてよい。

(i)　$B\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right) = \pi$ となることを示せ。　(Hint：定義の積分変数 s を三角関数で表示せよ)

(ii)　$\Gamma(1)$ および $\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right)$ の値を求めよ。

(iii)　$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$　　($x>0$) となることを示せ。

(iv)　$\displaystyle\int_0^1 \frac{x^{3/2}(1-x)^{-1/2}}{(x+1)^3}dx = \frac{\sqrt{2}}{8}B\left(\frac{5}{2},\frac{1}{2}\right) = \frac{3\sqrt{2}}{64}\pi$ となることを示せ。(Hint：$\dfrac{2x}{x+1} = t$ とおけ)

%%%%%% 基本的な関数の原始関数 %%%%%%

$$\int x^\alpha dx = \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1} \quad (\alpha\ne -1), \qquad \int\frac{dx}{x} = \log|x|,$$

$$\int e^x dx = e^x, \quad \int a^x dx = \frac{a^x}{\log a} \quad (a>0,\ a\ne 1), \quad \int \log|x|dx = x\log|x| - x,$$

$$\int \sin(ax+b)dx = -\frac{1}{a}\cos(ax+b) \quad (a\ne 0), \qquad \int\cos(ax+b)dx = \frac{1}{a}\sin(ax+b) \quad (a\ne 0),$$

$$\int \sec^2(ax+b)dx = \frac{1}{a}\tan(ax+b) \quad (a\ne 0), \qquad \int \tan(ax+b)dx = -\frac{1}{a}\log|\cos(ax+b)| \quad (a\ne 0),$$

$$\int\frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\log\left|\frac{x-a}{x+a}\right| \quad (a\ne 0), \qquad \int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} \quad (a\ne 0), \qquad \int\frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} \quad (a\ne 0),$$

$$\int\sqrt{a^2-x^2}dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{a^2-x^2} + a^2\arcsin\frac{x}{a}\right) \quad (a>0),$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+A}}\,dx = \log|x+\sqrt{x^2+A}| \quad (A\ne 0),$$

$$\int\sqrt{x^2+A}\,dx = \frac{1}{2}(x\sqrt{x^2+A} + A\log|x+\sqrt{x^2+A}|) \quad (A\ne 0).$$