2005 年度 V 類 T 組　微分積分学第 2 中間試験問題解答例

2005.12.15. 井上淳

$\boxed{1}$ 以下の重積分の値を求めよ（計算過程も明示せよ）。

$$(i)\quad \iint_{D_1} (x-y)^2\sqrt{1-(x+y)^2}dxdy, \qquad D_1 = \{(x,y) \mid |x+y| \le 1, |x-y| \le 1\},$$

$$(ii)\quad \iint_{D_2} x\,dxdy, \qquad D_2 = \{(x,y) \mid \sqrt{x}+\sqrt{y} \le 1\}.$$

(i)[5 点] $u = x+y, v = x-y$ とおくと、$x = (u+v)/2, y = (u-v)/2$ であり、D_1 は $\Omega_1 = \{(u,v) \mid |u| \le 1, |v| \le 1\}$ の上に 1 対 1 に写され

$$\det\left(\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right) = -\frac{1}{2}$$

である。これより、Fubini の定理を用いて

$$\iint_{D_1}(x-y)^2\sqrt{1-(x+y)^2}dxdy = \frac{1}{2}\iint_{\Omega_1} v^2\sqrt{1-u^2}dudv = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} v^2dv \int_{-1}^{1}\sqrt{1-u^2}du = \frac{\pi}{6}.$$

(ii)[5 点] $u = \sqrt{x}, v = \sqrt{y}$ とおくと、$x = u^2, y = v^2$ であり、D_2 の内部は $\Omega_2 = \{(u,v) \mid 0 \le u, v,\ u+v \le 1\}$ の内部の上に 1 対 1 に写され

$$\det\left(\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right) = 4uv$$

である。これより、Fubini の定理を用いて

$$\iint_{D_2} x\,dxdy = 4\iint_{\Omega_2} u^3vdudv = \int_0^1 v\left[\int_0^{1-v} 4u^3du\right]dv = \int_0^1 v(1-v)^4dv = \frac{1}{30}.$$

別解：Fubini の定理を用いて

$$\iint_{D_2} x\,dxdy = \int_0^1\left[\int_0^{(1-\sqrt{y})^2} xdx\right]dy = \int_0^1 \frac{(1-\sqrt{y})^4}{2}dy = \int_0^1 v(1-v)^4dv = \frac{1}{30}.$$

$\boxed{2}$ $x > 0,\ y > 0$ に対して、二つの関数を以下で定義する。

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}dt, \qquad B(x,y) = \int_0^1 s^{x-1}(1-s)^{y-1}\,ds.$$

このとき、以下に答よ。但し、$B(x,y) = \dfrac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$ となることを用いてよい。

(*i*)　$B\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right) = \pi$ となることを示せ。　(Hint：定義の積分変数 s を三角関数で表示せよ）

(*ii*)　$\Gamma(1)$ および $\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right)$ の値を求めよ。

(*iii*)　$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$　（$x > 0$）となることを示せ。

(*iv*)　$\displaystyle\int_0^1 \frac{x^{3/2}(1-x)^{-1/2}}{(x+1)^3}dx = \frac{\sqrt{2}}{8}B\left(\frac{5}{2},\frac{1}{2}\right) = \frac{3\sqrt{2}}{64}\pi$ となることを示せ。(Hint：$\dfrac{2x}{x+1} = t$ とおけ)

(0) ことの序でに、$B(x,y) = \dfrac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$ を示そう。$x = uv, y = u(1-v)$ とすると、$(u,v) \to (x,y)$ という変数変換は $\Omega = \{(u,v) \mid 0 \le u,\ v \le 1\}$ の内部を $D = \{(x,y) \mid 0 \le x, y\}$ の内部の上に 1 対 1 に写し、

$$\det\left(\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right) = \det\begin{pmatrix} v & u \\ 1-v & -u\end{pmatrix} = -u$$

である。$\Omega_n = \{(u,v) \mid 0 \le u \le n,\ 0 \le v \le 1\}$ とし $D_n = \{(x,y) \mid 0 \le x, y,\ 0 \le x+y \le n\}$ とすると、

$$\begin{aligned}\Gamma(p)\Gamma(q) &= \int_0^\infty e^{-t} t^{p-1} dt \int_0^\infty e^{-s} s^{q-1} ds = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-t-s} t^{p-1} s^{q-1}\, dt ds \\ &= \lim_{n\to\infty} \iint_{D_n} e^{-x-y} x^{p-1} y^{q-1}\, dx dy = \lim_{n\to\infty} \iint_{\Omega_n} e^{-u} (uv)^{p-1} (u(1-v))^{q-1} u du dv \\ &= \lim_{n\to\infty} \left(\int_0^1 v^{p-1} (1-v)^{q-1} \int_0^n e^{-u} u^{p+q-1} du \right) = B(p,q)\Gamma(p+q).\end{aligned}$$

(i)[2 点] $s = \sin^2\theta (0 \le \theta \le \pi/2)$ とおいて、変数変換すると

$$B(p,q) = 2\int_0^{\pi/2} (\sin\theta)^{2p-1} (\cos\theta)^{2q-1} d\theta$$

が求まるので、$B(1/2, 1/2) = \pi$ となる。

(ii)[2 点] これより

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t} dy = -e^{-t}\big|_0^\infty = 1, \quad \Gamma(1/2)^2 = B(1/2,1/2)\Gamma(1) = \pi$$

である。

(iii)[3 点] 更に $d(t^x)/dt = xt^{x-1}$ に注意し部分積分すれば直ちに $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ となる。

(iv)[3 点] $\frac{2x}{x+1} = t$ より $x = \frac{t}{2-t}$ だから、

$$x+1 = \frac{2}{2-t}, \quad 1-x = \frac{2(1-t)}{2-t}, \quad \frac{dx}{dt} = \frac{2}{(2-t)^2}$$

を積分に代入して

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{x^{3/2}(1-x)^{-1/2}}{(x+1)^3} dx &= \frac{\sqrt{2}}{8} \int_0^1 t^{3/2} (1-t)^{-1/2} dt = \frac{\sqrt{2}}{8} B\left(\frac{5}{2}, \frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{\sqrt{2}}{8} \frac{\Gamma(5/2)\Gamma(1/2)}{\Gamma(3)} = \frac{\sqrt{2}}{8} \frac{\frac{3}{4}\Gamma(1/2)^2}{\Gamma(3)} = \frac{3\sqrt{2}}{64}\pi.\end{aligned}$$