「微分積分学第 2B」期末追試問題候補　2005 年度 V 類 T 組

2006.03.20. 井上淳

追試では以下のような問題が出されます。各自、解いておいてみて下さい。しばらくしてから解答例を掲載します。

$\boxed{\mathbf{1}}$ 曲面 $z = xy$ の円柱 $x^2 + y^2 \leq a^2$ の内部にある部分の表面積を求めよ。

$\boxed{\mathbf{2}}$ 次の面積分を求めよ。

$$\int_S xyz(y^2z^2 + z^2x^2 + x^2y^2)\,dS, \quad S = \{\ (x, y, z) \mid x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0,\ x^2 + y^2 + z^2 = a^2\}.$$

$\boxed{\mathbf{3}}$ $f = f(x, y, z)$ と $g = g(x, y, z)$ を滑らかな実関数とし

$$V = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2\}, \quad S = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = a^2\}$$

とする。$r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$ とし

$$\frac{\partial f}{\partial r} = \frac{x}{r}\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{y}{r}\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{z}{r}\frac{\partial f}{\partial z}$$

であることを用いて

$$\frac{\partial f}{\partial r} = \frac{x}{r}\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{y}{r}\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{z}{r}\frac{\partial f}{\partial z}$$

であることを用いて

(1) $\nabla\left(\dfrac{\partial f}{\partial r}\right) = \dfrac{1}{r}\nabla f - \left(\dfrac{x}{r}, \dfrac{y}{r}, \dfrac{z}{r}\right)\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial f}{\partial r} + \dfrac{\partial}{\partial r}(\nabla f)$ を示せ。

(2) $\displaystyle\iiint_V \frac{\partial g}{\partial r}\,dxdydz = \int_S g\,dS - \iiint_V \frac{2g}{r}\,dxdydz$ を示せ。

(3) $\displaystyle\iiint_V \Delta f\,\frac{\partial f}{\partial r}\,dxdydz = \int_S \left\{\left|\frac{\partial f}{\partial r}\right|^2 - \frac{1}{2}|\nabla f|^2\right\} dS + \iiint_V \frac{1}{r}\left|\frac{\partial f}{\partial r}\right|^2 dxdydz$ を示せ。

$\boxed{\mathbf{4}}$ 次の級数の収束，発散を調べよ。

$$(1)\quad \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n^3+1} - \sqrt{n^3-1}\right), \qquad (2)\quad \sum_{n=1}^{\infty}\left\{\log\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right\}^2.$$