

「微分積分学第2B」期末追試問題候補解答ヒント

2005年度 V 類 T 組 2006.04.10. 井上淳

期末追試実施、4月11日、pm.1.00-4.00、H137講義室

期末追試問題候補についてのヒント。

1 曲面 $z = xy$ の円柱 $x^2 + y^2 \leq a^2$ の内部にある部分の表面積を求めよ。

ヒント： $0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq r \leq a$ なるパラメタを用いて $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$ と置くと、この曲面の面積は

$$\int_0^a \int_0^{2\pi} r^2 \sin \theta \cos \theta r dr d\theta = \int_0^a r^3 dr \left(\int_0^{2\pi} \sin \theta \cos \theta d\theta \right)$$

で計算される。

2 次の面積分を求めよ。

$$\int_S xyz(y^2 z^2 + z^2 x^2 + x^2 y^2) dS, \quad S = \{(x, y, z) \mid x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x^2 + y^2 + z^2 = a^2\}.$$

ヒント： $(x, y, z), x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$ は3次元極座標 $x = r \cos \phi \cos \theta, y = r \cos \phi \sin \theta, z = r \sin \phi, 0 \leq \theta \leq \pi/2, 0 \leq \phi \leq \pi/2$ を用いて表示される。ここで

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, \phi)} = r^2 \cos \phi$$

となるから面積要素は $dS = a^2 \cos \phi d\theta d\phi$ となる。故に $D = \{(\theta, \phi) \mid 0 \leq \theta \leq \pi/2, 0 \leq \phi \leq \pi/2\}$ として

$$\begin{aligned} & \int_S xyz(y^2 z^2 + z^2 x^2 + x^2 y^2) dS \\ &= \iint_D a^9 \cos^5 \phi \sin \phi \cos \theta \sin \theta (\sin^2 \phi + \cos^2 \phi \cos^2 \theta \sin^2 \theta) d\theta d\phi \end{aligned}$$

となる。後は、

$$\int \sin^n \theta d\theta, \int \cos^m \theta d\theta$$

の不定積分の計算を部分積分と漸化式で求めれば良い。

3 $f = f(x, y, z)$ と $g = g(x, y, z)$ を滑らかな実関数とし

$$V = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2\}, \quad S = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = a^2\}$$

とする。 $r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$ とし

$$\frac{\partial f}{\partial r} = \frac{x}{r} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{y}{r} \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{z}{r} \frac{\partial f}{\partial z}$$

であることを用いて

$$(1) \nabla \left(\frac{\partial f}{\partial r} \right) = \frac{1}{r} \nabla f - \left(\frac{x}{r}, \frac{y}{r}, \frac{z}{r} \right) \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial r} (\nabla f) \text{ を示せ。}$$

$$(2) \iiint_V \frac{\partial g}{\partial r} dx dy dz = \int_S g dS - \iiint_V \frac{2g}{r} dx dy dz \text{ を示せ。}$$

$$(3) \iiint_V \Delta f \frac{\partial f}{\partial r} dx dy dz = \int_S \left\{ \left| \frac{\partial f}{\partial r} \right|^2 - \frac{1}{2} |\nabla f|^2 \right\} dS + \iiint_V \frac{1}{r} \left| \frac{\partial f}{\partial r} \right|^2 dx dy dz \text{ を示せ.}$$

ヒント：(1) の x -成分だけを計算してみよう。

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{r} f_x \right) &= \left(\frac{x}{r} \right)_x f_x + \frac{x}{r} f_{xx} = \frac{r^2 - x^2}{r^3} f_x + \frac{x}{r} f_{xx}, \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{y}{r} f_y \right) &= \frac{-xy}{r^3} f_y + \frac{y}{r} f_{xy}, \quad \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{z}{r} f_z \right) = \frac{-xz}{r^3} f_z + \frac{z}{r} f_{zx} \end{aligned}$$

だから

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial r} \right) = \frac{r^2 - x^2}{r^3} f_x + \frac{x}{r} f_{xx} + \frac{-xy}{r^3} f_y + \frac{y}{r} f_{yx} + \frac{-xz}{r^3} f_z + \frac{z}{r} f_{zx}.$$

一方、右辺の x -成分は

$$\frac{1}{r} f_x - \frac{x}{r^2} \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{x}{r} \frac{\partial f}{\partial r}$$

だから、各項を計算する。

$$\frac{x}{r} \frac{\partial}{\partial r} f = \frac{x}{r} \left(\frac{x}{r} f_{xx} + \frac{y}{r} f_{yx} + \frac{z}{r} f_{zx} \right), \quad \frac{\partial}{\partial r} f_x = \frac{x}{r} f_{xx} + \frac{y}{r} f_{yx} + \frac{z}{r} f_{zx}$$

より、(1) の右辺=左辺が従う。他のも同様。

4 次の級数の収束、発散を調べよ。

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{n^3+1} - \sqrt{n^3-1} \right), \quad (2) \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \log \left(1 + \frac{1}{n} \right) \right\}^2.$$

ヒント： $a_n \sim b_n$ とは $C_1, C_2 > 0$ があって $C_1 a_n \leq b_n \leq C_2$ となることとする。(1) は

$$\sqrt{n^3+1} - \sqrt{n^3-1} = \frac{2}{\sqrt{n^3+1} + \sqrt{n^3-1}} \sim \frac{2}{n^{3/2}}.$$

(2) は Taylor 展開

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + R(x), \quad |R(x)| \leq Cx^3 \quad (-1 \leq x \leq 1)$$

を用いよ。