「微分積分学第 2B」期末試験　2005 年度 V 類 T 組

2006.02.08, 5-8 時限、W241. 井上淳

答案用紙は 5 枚綴り、表紙（計算用紙）1 枚、すべて提出して下さい。答案はよく整理して記入し、必要ならばその旨を明記し裏を用いて下さい。

試験時間は 3 時間程。講義・演習についての批判・意見等歓迎します（試験後一週間以内に e-mail でも可)。この批判・意見等はどんなものであっても講義等への貢献とされ、ボーダーライン以下の成績を引き上げる役割を果たすことがあります。

$\boxed{1}$ 区分的に C^1-級の境界 $\partial\Omega$ を持つ有界領域 $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ と、$\overline{\Omega}$ 上の C^2-級関数 f, g に対し Green の公式が成立する：

$$\iint_\Omega (f\Delta g - g\Delta f)dxdy = \int_{\partial\Omega}\left(f\frac{\partial g}{\partial n} - \frac{\partial f}{\partial n}g\right)ds.$$

但し、 n は単位外向き法線ベクトル、右辺は $\partial\Omega$ 上の線積分。

(i) $\epsilon \geq 0$ とする。この公式を特に Ω が $D_{\epsilon,R} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, \epsilon \leq \sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2} \leq R\}$ の場合に極座標を用いて表現し直し、証明せよ（ヒント：$\tilde{f}(r,\theta) = f(r\cos\theta, r\sin\theta)$ を r と θ に関して 2 回偏微分してみよ！）。

(ii) $D_R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, \sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2} < R\}$ とし、f を $\overline{D}_R$ 上の C^2 級関数で $\Delta f = 0$ なるものとする。この時、(i) で $g = 1$ とすることによって以下を示せ。

$$f(a,b) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(a + R\cos\theta, b + R\sin\theta)d\theta.$$

$\boxed{2}$ (i) $y = \frac{1}{2}(\sin^{-1}x)^2$ が微分方程式 $(1-x^2)y'' - xy' = 1$ を満たすことを示せ。

(ii) また、それを用い $y = \frac{1}{2}(\sin^{-1}x)^2$ の整級数展開を求め、それの収束半径を計算せよ。

$\boxed{3}$ 次の級数の収束・発散を調べ判定し、その判定理由を述べよ。

$$(i) \quad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left(\frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{(-1)^{n-1}}{n}\right), \qquad (ii) \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n\, n!}{(2n)!}.$$

$\boxed{4}$ 次の（広義）重積分の値を求めよ。

$$(a) \quad \iint_{(0,\infty)\times(0,\infty)} \frac{dxdy}{(1+x)(1+xy^2)},$$

$$(b) \quad \iint_D (1+x^2+y^2)^{-2}\,dxdy \quad (D = \{(x,y) \mid (x^2+y^2)^2 \leq x^2 - y^2,\ x \geq 0\}).$$

ヒント：$(a^{-1}\arctan a^{-1}x)' = (x^2+a^2)^{-1}$, $(a^{-1}\tan(ax+b))' = \sec^2(ax+b)$.

$\boxed{5}$ 数列 $\{a_n\}$ を $a_0 = 0$, $a_{n+1} = 1 + \sin(a_n - 1)$ と定める。このとき $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{j=0}^n a_j}{n}$ を求めよ。

<u>参考の為に試験中に出したヒントの数々を裏面に記しておく。質問に対する答は「解答例」に記載。</u>

(1) 「どれがスカラーでどれがベクトルか分からない」

(2)「左辺がスカラーで右辺はベクトルだからおかしい」

(3) (i) のヒントだけでは合成関数の偏微分公式を忘れていてできないだろうと想定し黒板に

$$\frac{\partial}{\partial r}\tilde{f}(r,\theta)=\cos\theta\, f_x(r\cos\,\theta,r\sin\,\theta)+\sin\theta\, f_y(r\cos\,\theta,r\sin\,\theta)$$

と大書したが、「あの式で何故 f_x が出てくるのか分かりません」。

(4) 「問題文の "極座標を用いて表現し直し" の意味が分かりません。左辺の式の "$dx\,dy$" を "$dr\,d\theta$" に書き換えると言うことですか」

$\boxed{2}$への質問：(1)「(i) をやってみたが答えが合いません」。

(3)「(ii) の整級数展開の意味が分かりません」

$\boxed{3}$ 試験中のヒント：

一般に収束の判定条件は「十分条件を与えるだけ」であること、(i) については、「級数の収束の定義は部分和が収束するかどうか」だったことを思い出して欲しいと最初に説明。更に、早めに提出した答案をみると、『級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=1$ だから発散する』という『論拠』で「発散」としていたので、これは一般には間違いだと説明した。

$\boxed{4}$への質問：

(i)「sec で何でしたか？」

(ii) 「$(0,\infty)\times(0,\infty)$って何ですか」

$\boxed{5}$への質問：

「$\lim_{n\to\infty} b_n=\beta \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} n^{-1}(a_1+\cdots+a_n)=\beta$ を証明するのですか」