「微分積分学第 2B」期末試験解答例　2005 年度 V 類 T 組

2006.02.08、 井上淳

以下には諸君の解答自身に関する私のコメントは書けないが、2 月 20 日頃までには試験時のヒントの数々、君達からの試験中の質問、成績上位者とか、追試験についての情報も書き込んだものを掲載する予定である。2 月 8 日 8 時までに追試希望者 1 名。

================================

$\boxed{1}$ 区分的に C^1-級の境界 $\partial\Omega$ を持つ有界領域 $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ と、$\overline{\Omega}$ 上の C^2-級関数 f, g に対し Green の公式が成立する：

$$\iint_\Omega (f\Delta g - g\Delta f)dxdy = \int_{\partial\Omega}\left(f\frac{\partial g}{\partial n} - \frac{\partial f}{\partial n}g\right)ds.$$

但し、 n は単位外向き法線ベクトル、右辺は $\partial\Omega$ 上の線積分。
(i) $\epsilon \geq 0$ とする。この公式を特に Ω が $D_{\epsilon,R} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, \epsilon \leq \sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2} \leq R\}$ の場合に極座標を用いて表現し直し、証明せよ（ヒント：$\tilde{f}(r,\theta) = f(r\cos\theta, r\sin\theta)$ を r と θ に関して 2 回偏微分してみよ！）。
(ii) $D_R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, \sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2} < R\}$ とし、f を $\overline{D}_R$ 上の C^2 級関数で $\Delta f = 0$ なるものとする。この時、(i) で $g = 1$ とすることによって以下を示せ。

$$f(a,b) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(a+R\cos\theta, b+R\sin\theta)d\theta.$$

[略解例]：(i)[5] (a,b) を中心とする極座標をとる。$x-a = r\cos\theta, y-b = r\sin\theta$ $(0 \leq r < \infty,\ 0 \leq \theta < 2\pi)$ とおき、$u(x,y)$ に対し $\tilde{u}(r,\theta) = u(a+r\cos\theta, b+r\sin\theta)$ と記す。この時、

$$\widetilde{(\Delta u)}(r,\theta) = [\partial_r^2 + \frac{1}{r}\partial_r + \frac{1}{r^2}\partial_\theta^2]\tilde{u}(r,\theta)$$

となることは、1 年次微分積分学の基本的修得事項であるし、今後良く使われるであろう。また積分記号下の変数変換公式により

$$\iint_{D_{\epsilon,R}} f(x,y)\Delta g(x,y)dxdy = \iint_{(\epsilon,R)\times(0,2\pi)} \tilde{f}(r,\theta)\widetilde{(\Delta g)}(r,\theta)\, rdrd\theta$$

となる。重積分から累次積分に直して部分積分すると

$$\begin{aligned}\int_\epsilon^R \tilde{f}\partial_r^2\tilde{g}\, rdr &= [r\tilde{f}\partial_r\tilde{g}]\big|_\epsilon^R - \int_\epsilon^R \partial_r(r\tilde{f})\partial_r\tilde{g}\, dr \\ &= R\tilde{f}\partial_r\tilde{g} - \epsilon\tilde{f}\partial_r\tilde{g} - \int_\epsilon^R \partial_r\tilde{f}\partial_r\tilde{g}\, rdr - \int_\epsilon^R \tilde{f}\partial_r\tilde{g}\, dr,\end{aligned}$$

かつ

$$\int_\epsilon^R \tilde{f}\frac{1}{r}\partial_r\tilde{g}\, rdr = [\tilde{f}\tilde{g}]\big|_\epsilon^R - \int_\epsilon^R \tilde{g}\frac{1}{r}\partial_r\tilde{f}\, rdr.$$

f と g の役割を変えて計算すると

$$\int_\epsilon^R \tilde{f}\big(\partial_r^2\tilde{g} + \frac{1}{r}\partial_r\tilde{g}\big)\, rdr - \int_\epsilon^R \tilde{g}\big(\partial_r^2\tilde{f} + \frac{1}{r}\partial_r\tilde{f}\big)\, rdr = [r\tilde{f}\partial_r\tilde{g}]\big|_\epsilon^R - [r\tilde{g}\partial_r\tilde{f}]\big|_\epsilon^R. \tag{1}$$

故に、上式を θ に関して積分し、円環領域 $D_{\epsilon,R}$ の外側の境界で ∂_r は外向きの法線微分、内側の境界で $-\partial_r$ は外向きの法線微分を与えることに注意する。すると、

$$\int_0^{2\pi} R\tilde{f}(R,\theta)\frac{\partial\tilde{g}}{\partial r}(R,\theta) - \int_0^{2\pi} \epsilon\tilde{f}(\epsilon,\theta)\frac{\partial\tilde{g}}{\partial r}(\epsilon,\theta) = \int_{\partial D_{\epsilon,R}} f\frac{\partial g}{\partial n}ds. \tag{2}$$

また任意の r で

$$\int_0^{2\pi} \tilde{f}\partial_\theta^2\tilde{g}d\theta = -\int_0^{2\pi} \partial_\theta\tilde{f}\partial_\theta\tilde{g}d\theta = \int_0^{2\pi} \tilde{g}\partial_\theta^2\tilde{f}d\theta$$

なることに注意すると、(1) より

$$\begin{aligned}\iint_{D_{\epsilon,R}} (f\Delta g - g\Delta f)dxdy &= \int_0^{2\pi}\int_\epsilon^R (\tilde{f}\widetilde{(\Delta g)} - \widetilde{(\Delta f)}\tilde{g})\,rdrd\theta \\ &= \int_0^{2\pi}\left(\tilde{f}\,\frac{\partial\tilde{g}}{\partial r} - \frac{\partial\tilde{g}}{\partial r}\,\tilde{g}\right)d\theta\Bigg|_{r=\epsilon}^R = \int_{\partial D_{\epsilon,R}}\left(f\frac{\partial g}{\partial n} - \frac{\partial f}{\partial n}g\right)ds.\end{aligned} \tag{3}$$

(ii)[5] 求めたい式は (i) の記号を使えば、$[\partial_r^2 + \frac{1}{r}\partial_r + \frac{1}{r^2}\partial_\theta^2]\tilde{f}(r,\theta) = 0$ ならば

$$\tilde{f}(0,\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\tilde{f}(R,\theta)d\theta$$

となる。これを示そう。

f, g が C^2 であることと積分の定義から、(3) で $\epsilon \to 0$ とできて

$$\begin{aligned}\iint_{D_R} (f\Delta g - g\Delta f)dxdy &= \lim_{\epsilon\to 0}\int_0^{2\pi}\int_\epsilon^R (\tilde{f}\widetilde{(\Delta g)} - \widetilde{(\Delta f)}\tilde{g})\,rdrd\theta \\ &= \lim_{\epsilon\to 0}\int_0^{2\pi}\left(\tilde{f}\,\frac{\partial\tilde{g}}{\partial r} - \frac{\partial\tilde{g}}{\partial r}\,\tilde{g}\right)d\theta\Bigg|_{r=\epsilon}^R = \int_{\partial D_R}\left(f\frac{\partial g}{\partial n} - \frac{\partial f}{\partial n}g\right)ds.\end{aligned} \tag{4}$$

この(4) で $\Delta f = 0$, $g = 1$ とすれば

$$0 = \int_{\partial D_R}\frac{\partial f}{\partial n}ds = \int_0^{2\pi}\frac{\partial\tilde{f}}{\partial r}(R,\theta)d\theta = \int_0^{2\pi}\frac{\partial\tilde{f}}{\partial r}(r,\theta)d\theta\Bigg|_{r=R}.$$

上式は R だけではなく任意の $0 < r < R$ で成立することに注意する。θ 方向による積分と r 方向の微分の順序を入れ替えることができて、

$$\frac{\partial}{\partial r}\int_0^{2\pi}\tilde{f}(r,\theta)d\theta = 0$$

が従う。

これを r について $(0,R)$ で積分して

$$0 = \int_0^{2\pi}\tilde{f}(R,\theta)d\theta - \int_0^{2\pi}\tilde{f}(0,\theta)d\theta = \int_0^{2\pi} f(a+R\cos\theta, b+R\sin\theta)d\theta - 2\pi f(a,b). \qquad \square$$

$\boxed{2}$ (i) $y = \frac{1}{2}(\sin^{-1}x)^2$ が微分方程式 $(1-x^2)y'' - xy' = 1$ を満たすことを示せ。

(ii) また、それを用い $y = \frac{1}{2}(\sin^{-1}x)^2$ の整級数展開を求め、それの収束半径を計算せよ。

解答例：(i)[5] $z = \sin^{-1}x$ $(-\pi/2 \le z \le \pi/2, -1 \le x \le 1)$ とおくと $\sin z = x$ だから

$$z' = \frac{1}{\cos z}, \quad z'' = \frac{\sin z\cdot z'}{\cos^2 z}, \quad 1 - x^2 = \cos^2 z$$

となる。$y' = z\,z'$, $y'' = (z')^2 + z\,z''$ にこれらの式を代入して

$$(1-x^2)y'' - xy' = 1, \quad \text{かつ} \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0, \quad y''(0) = 1$$

となる。

(ii)[5] この微分方程式を n 回微分して、Leibnitz の公式から、

$$[(1-x^2)y'']^{(n)} = (1-x^2)y^{(n+2)} - 2xny^{(n+1)} - n(n-1)y^{(n)}, \quad [xy']^{(n)} = xy^{(n+1)} + ny^{(n)},$$

故に

$$y^{(n+2)}(0) - n^2y^{(n)}(0) = 0 \quad (n \ge 1) \quad \text{かつ} \quad y^{(2)}(0) = 1,\ y^{(3)}(0) = 0,\ y^{(4)}(0) = 4,\ y^{(5)}(0) = 0$$

これより数学的帰納法で

$$y(0)=0,\ y^{(2n)}(0)=\frac{(2n-2)!!}{(2n-1)!!}\frac{(2n)!}{2n}(n\geq 1),\quad y^{(2n+1)}(0)=0(n\geq 0)$$

が示される。ここで、$(2n)!!=(2n)(2n-2)(2n-4)\cdots 4\cdot 2$, $(2n-1)!!=(2n-1)(2n-3)(2n-5)\cdots 3\cdot 1$ とする。結局

$$y(x)=\sum_{n=0}^{\infty}y^{(n)}(0)\frac{x^n}{n!}=\frac{x^2}{2}+\frac{2!!}{3!!}\frac{x^4}{4}+\frac{4!!}{5!!}\frac{x^6}{6}+\cdots+\frac{(2n-2)!!}{(2n-1)!!}\frac{x^{2n}}{2n}+\cdots.$$

更に、

$$\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}\frac{x^{2(n+1)}}{2(n+1)}\Big/\frac{(2n-2)!!}{(2n-1)!!}\frac{x^{2n}}{2n}=\frac{2n}{2n+1}x^2\to x^2$$

だから、収束半径は 1 である。 □

（冪級数による解法、$y(x)=\sum_{n=2}c_nx^n$ として微分方程式に形式的に代入 x^n の係数を比較して c_n を定めていく方法もある。）

$$y'(x)=\sum_{n=2}nc_nx^{n-1}=\sum_{n=1}(n+1)c_{n+1}x^n,\quad y''(x)=\sum_{n=2}n(n-1)c_nx^{n-2}=\sum_{n=0}(n+1)(n+2)c_{n+2}x^n,$$

だから

$$(1-x^2)\sum_{n=0}(n+1)(n+2)c_{n+2}x^n-x\sum_{n=1}(n+1)c_{n+1}x^n=1$$

であり、x^n の係数を比較して

$$2c_2=1,\quad 2\cdot 3c_3=0,\quad c_2=\frac{1}{2},\quad c_3=0.$$

$$3\cdot 4c_4-2c_2-2c_2=0, 4\cdot 5c_5-2\cdot 3c_3-3c_3=0$$

より、$c_{2n+1}=0$ 及び

$$(n+1)(n+2)c_{n+2}-n^2c_n=0,\quad c_{n+2}=\frac{n^2}{(n+1)(n+2)}c_n\quad (n\geq 2)$$

が推定され、数学的帰納法で証明される。更に、

$$c_2=\frac{1}{2},\quad c_4=\frac{1}{6},\quad c_6=\frac{4}{45},\quad \cdots$$

を用いると

$$c_{2n}=\frac{(2n-2)!!}{(2n-1)!!}\frac{1}{2n}$$

が推定され、これも数学的帰納法で証明される。また、この数の別の表現として

$$c_{2n}=\frac{((2n-2)!!)^2}{(2n)!}$$

を与えた答案もあった。 □

$\boxed{3}$ 次の級数の収束・発散を調べ判定し、その判定理由を述べよ。

$$(i)\quad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{(-1)^{n-1}}{n}\right),\qquad (ii)\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n n!}{(2n)!}.$$

解答例：(i)[5] 発散する。級数の収束性の定義に戻った計算をする。

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\left(\frac{1}{\sqrt{k}}+\frac{(-1)^{k-1}}{k}\right)=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{1}{\sqrt{k}}+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$$

であり、第 1 項は $\frac{1}{\sqrt{k}}$ が正で単調減少して 0 に収束するから、交代級数に関する Leibnitz の定理より収束する。また第 2 項は無限大に発散することは既知。故に、$S_n\to\infty(n\to\infty)$ である。

(ii)[5] 収束する。正項級数 $\sum a_n$ に関する D'Alembert の判定法を用いる。

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=r \text{ が存在するとする} \Longrightarrow \begin{cases}\text{もし } 0\le r<1 \text{ ならば、} \sum a_n \text{ は収束する、}\\ \text{もし } 1<r \text{ ならば、} \sum a_n \text{ は発散する。}\end{cases}$$

$a_n=\frac{n^n\,n!}{(2n)!}$ とおくと

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{(n+1)^{n+1}(n+1)!}{(2(n+1))!}\frac{(2n)!}{n^n n!}=\frac{(n+1)^2}{(2n+1)(2n+2)}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$
$$\longrightarrow \frac{e}{4}<1\ (n\to\infty)$$

となるから、収束する。 □

$\boxed{4}$ 次の重積分を求めよ。

$$(a)\quad \iint_{(0,\infty)\times(0,\infty)}\frac{dxdy}{(1+x)(1+xy^2)},$$
$$(b)\quad \iint_D (1+x^2+y^2)^{-2}\,dxdy\quad (D=\{(x,y)\mid (x^2+y^2)^2\le x^2-y^2,\ x\ge 0\}).$$

ヒント：$(a^{-1}\arctan a^{-1}x)'=(x^2+a^2)^{-1}$, $(a^{-1}\tan(ax+b))'=\sec^2(ax+b)$.

解答例：(a)[5] Fubini の定理を用いて重積分を累次積分

$$\iint_{(0,\mathbb{R})\times(0,\mathbb{R})}\frac{dxdy}{(1+x)(1+xy^2)}=\int_0^\infty\frac{1}{x(1+x)}\left[\int_0^\infty\frac{dy}{1/x+y^2}\right]dx$$

にし、ヒントを用いて計算すると

$$\int_0^\infty\frac{dy}{1/x+y^2}=\sqrt{x}\arctan(\sqrt{x}y)\big|_{y=0}^\infty=\frac{\pi}{2}\sqrt{x}$$

となる。変数変換 $z=\sqrt{x}$ を用いて

$$\iint_{(0,\mathbb{R})\times(0,\mathbb{R})}\frac{dxdy}{(1+x)(1+xy^2)}=\frac{\pi}{2}\int_0^\infty\frac{\sqrt{x}}{x(1+x)}dx=\pi\int_0^\infty\frac{dz}{1+z^2}=\frac{\pi^2}{2}. \qquad \square$$

(b)[5] $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$ なる変数変換を用いて

$$D_\epsilon=\{(x,y)\mid (x^2+y^2)^2\le x^2-y^2,\ x\ge 0,\ x^2+y^2\ge\epsilon^2\}$$
$$\to R_\epsilon=\{(r,\theta)\mid r^2\le\cos^2\theta-\sin^2\theta=\cos 2\theta,\ \cos\theta\ge 0,\ 0\le\theta\le 2\pi,\ r\ge\epsilon\}$$

なる領域を考える。$\{0\le\theta\le 2\pi\mid\cos\theta\ge 0,\ \cos 2\theta\ge 0\}=[0,\pi/4]\cup[7\pi/4,2\pi]$ なることと、Fubini の定理を用いて、

$$\iint_{D_\epsilon}(1+x^2+y^2)^{-2}\,dxdy=\iint_{R_\epsilon}\frac{rdrd\theta}{(1+r^2)^2}$$
$$=\left(\int_0^{\pi/4}+\int_{7\pi/4}^{2\pi}\right)\left[\int_\epsilon^{\sqrt{\cos 2\theta}}\frac{rdr}{(1+r^2)^2}\right]d\theta$$

となる。$z=r^2$ を用いて

$$\int_\epsilon^{\sqrt{\cos 2\theta}}\frac{rdr}{(1+r^2)^2}=\frac{1}{2}\int_{\epsilon^2}^{\cos 2\theta}\frac{dz}{(1+z)^2}=\frac{1}{2}\left[-\frac{1}{1+z}\right]_{z=\epsilon^2}^{z=\cos 2\theta}=\frac{1}{2}\left[\frac{-1}{1+\cos 2\theta}+\frac{1}{1+\epsilon^2}\right].$$

更に $\displaystyle\int\frac{d\theta}{1+\cos 2\theta}=\frac{1}{2}\tan\theta$ だから、

$$\iint_{D_\epsilon}(1+x^2+y^2)^{-2}\,dxdy=\frac{1}{2}\left[-\frac{1}{2}\tan\theta+\frac{1}{1+\epsilon^2}\right]_0^{\pi/4}+\frac{1}{2}\left[-\frac{1}{2}\tan\theta+\frac{1}{1+\epsilon^2}\right]_{7\pi/4}^{2\pi}$$
$$\to\frac{\pi-2}{4}=\iint_D(1+x^2+y^2)^{-2}\,dxdy\quad(\epsilon\to 0). \qquad \square$$

$\boxed{5}$ 数列 $\{a_n\}$ を $a_0 = 0,\ a_{n+1} = 1 + \sin(a_n - 1)$ と定める。このとき $\lim_{n\to\infty}(\sum_{j=0}^{n} a_j)/n$ を求めよ。

解答例 [10]：$1 - a_{n+1} = \sin(1 - a_n)$ であり $c_n = 1 - a_n$ とおく。$c_0 \in (0, 1]$ であり、$x \in (0, 1]$ のとき $\sin x < x$ で、$\sin x \in (0, 1]$ である。n に関する帰納法で $1 = c_0 > c_1 > c_2 > \cdots > c_n > 0$ だから $\lim_{n\to\infty} c_n = c \geq 0$ となる。これより $c = \sin c$ だから $c = 0$ である。即ち、$\lim_{n\to\infty} a_n = 1$ だから、$\lim_{n\to\infty}(\sum_{j=0}^{n} a_j)/n = 1$ となる。 $\square$