

級数と整級数

記述を簡単にするために、2つの数列 a_n, b_n に対し $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n/b_n = 1$ なるとき $a_n \sim b_n$ と記す。このとき、 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ の収束、発散は $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ の収束、発散と軌を一にする。

0.1 収束、発散 1

(1) 収束

$$\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \frac{n^n}{n!} = \frac{n^n}{(n+1)^n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n} \rightarrow e^{-1} (< 1) \quad (n \rightarrow \infty).$$

(2) 収束: 任意の $\epsilon > 0$ に対し $n^{-\epsilon} \log n \leq M$ なるから

$$\frac{\log n}{n^2} = n^{-\epsilon} \log n \frac{1}{n^{2-\epsilon}} < \frac{M}{n^{2-\epsilon}}.$$

(3) 収束

$$\frac{((n+1)!)^2 (2n)!}{(2(n+1))! (n!)^2} = \frac{n+1}{2(2n+1)} \rightarrow \frac{1}{4}.$$

(4) 発散

$$\frac{1}{an+b} \sim \frac{1}{an}.$$

(5) 収束: $\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + R(x) (-1 \leq x \leq 1) |R(x)| \leq Cx^3$ より

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \log\left(1 + \frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2}\right).$$

(6) 収束:

$$\frac{(n+1)^\alpha n!}{(n+1)! n^\alpha} = \frac{(1 + \frac{1}{n})^\alpha}{n+1} \rightarrow 0.$$

(7)

$$\left(\frac{cn+d}{an+b}\right)^n = \left(\frac{c}{a}\right)^n \left(\frac{1+d/(cn)}{1+b/(an)}\right)^n \rightarrow \begin{cases} \text{級数は収束} & c < a \\ \text{級数は発散} & c \geq a \end{cases}$$

(8) 収束:

$$\frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{n} = \frac{1}{n(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})} \sim \frac{2}{n^{3/2}}$$

(9) $\alpha > 2$ ならば収束、 $\alpha \leq 2$ ならば発散:

$$\sqrt{n^\alpha+1} - \sqrt{n^\alpha-1} = \frac{1}{\sqrt{n^\alpha+1} + \sqrt{n^\alpha-1}} \sim \frac{1}{n^{\alpha/2}}.$$

0.2 収束・発散 2

(1)

$$\log\left(1 + \frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{n^2} - \frac{1}{2n^4} + O\left(\frac{1}{n^6}\right)$$

$\alpha > -1$ ならば収束、 $\alpha \leq -2$ ならば発散。

(2) (a) 収束

$$\frac{(n+1)^{n+1}(n+1)!(2n)!}{(2(n+1))! n^n n!} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \frac{n+1}{4n+2} \rightarrow \frac{e}{4} (< 1).$$

(b) 収束

$$e^x - 1 = x + \frac{x^2}{2!} + 0(x^3)$$

より

$$e^{n^{-2}} - 1 = n^{-2} + 0(n^{-4}).$$

(3) 関数 $f(x) = \frac{1}{x(\log x)^p}$ は単調減少、

$$\int_1^\infty f(x)dx = \int_0^\infty \frac{dy}{y^p} = \begin{cases} \text{収束} & p > 1 \text{ のとき} \\ \text{発散} & p \leq 1 \text{ のとき} \end{cases}$$

だから級数 $\sum_{n=1}^\infty f(n)$ の収束・発散も同様に成立。

0.3 整級数

(1) $\sum_{n=0}^k x^n = \frac{x^{k+1} - 1}{x - 1}$ ($x \neq 1$) を x に関して微分すると

$$\sum_{n=1}^k nx^{n-1} = \frac{kx^{k+1} - (k+1)x^k + 1}{(x-1)^2}.$$

$|x| < 1$ のとき $\lim_{n \rightarrow \infty} nx^n = 0$ だから

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^k nx^n = \frac{x}{(x-1)^2}.$$

(2) (i) 収束半径 = 1/2

$$\frac{2^{n+1} + n + 1}{2^n + n} = \frac{2 + (n+1)2^{-n}}{1 + n2^{-n}} \rightarrow 2.$$

(ii) 収束半径 = ∞

$$\frac{1}{(n+1)^{n+1}} n^n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \frac{1}{n+1} \rightarrow 0.$$

(3)

$$\frac{1}{1-3x+2x^2} = \frac{1}{1-2x} + \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^\infty (2x)^n + \sum_{n=0}^\infty x^n = \sum_{n=0}^\infty (1+2^n)x^n.$$

より、収束半径 = 1/2

注意：級数の Cauchy や d'Alembert による判定法は、本質的には等比級数との比較であるから、等比級数より収束の遅い級数、 $\sum 1/n^p$ 等、には適用できない。Gauss の判定法は、 $a_n/a_{n-1} < 1$, $a_n/a_{n-1} \rightarrow 1$ となる場合、「判定比を漸近展開してみる」というものであった。