

2004年度2学期数学演習S No.9

(微分積分 12/1 配布、12/8 提出分)

57 次の広義積分が収束することを示せ。(値は求めなくてよい。)

$$(1) \int_0^{\infty} \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{x}}{x+1} dx \quad (2) \int_0^1 \frac{\log x}{1-x} dx$$

58 $f(x)$ を実係数多項式とすると、広義積分 $\int_0^{\infty} f(x)e^{-x} dx$ は収束することを示せ。

59 次の広義積分の値を求めよ。

$$(1) \int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \quad (2) \int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}$$

60 Beta 関数 $B(p, q) = \int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1} dt$ ($p, q > 0$) について次を示せ。

$$(1) B(p, q) = 2 \int_0^{\pi/2} (\sin \theta)^{2p-1} (\cos \theta)^{2q-1} d\theta$$

$$(2) B(p, q) = \int_0^{\infty} \frac{x^{p-1}}{(1+x)^{p+q}} dx$$

$$(3) B\left(\frac{1}{r}, 1 - \frac{1}{r}\right) = r \int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^r} \quad (r > 1)$$

$$(4) B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \pi, \quad B\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}$$

61 $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = a$ とおくと、 $\int_0^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx$ を求めよ。

62 次の定積分の値を求めよ。

$$(1) I = \int_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}, \quad (\text{Hint: } x = \sin^2 \theta)$$

$$(2) I = \int_{-1}^1 \frac{dx}{(a-x)\sqrt{1-x^2}} \quad (a > 1) \quad (\text{Hint: } t = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}).$$

63 次の積分の値を求めよ。

$$(1) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{e^x + 2e^{-x} + 3} dx \quad (2) \int_1^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$$