

2004年度2学期数学演習S No.1

(微分積分 10/6 配布・提出分)

1 定積分の定義を用いて以下を計算せよ (高校時代の定義を思い出してでも良い)。

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{\sqrt{n^2 + 1^2}} + \frac{1}{\sqrt{n^2 + 2^2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2 + (n-1)^2}} \right\},$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \{(n+1)(n+2) \cdots (n+n)\}^{1/n}.$$

2 (1) $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots \quad (|x| < 1)$ を示せ。(ヒント: 等比数列の和。)

(2) 上式両辺を微分し、形式的に、無限和と微分とを交換することによって、

$$\frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + \cdots \quad (|x| < 1)$$

を導け。

3 $f_n = n^2 x^n (1-x) \quad (n = 1, 2, \dots)$ とおく。

$$\int_0^1 \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx \neq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx$$

を、両辺を計算することによって示せ。

4 (1) $\mathbf{R} = (-\infty, \infty)$ 上の関数 $f(x)$ が一様連続であることの定義を書け。

(2) $f(x) = \tan^{-1} x$ は \mathbf{R} 上一様連続であることを示せ。(ヒント: 平均値の定理を用いてもできる。)

5 I を (開または閉) 区間とする。以下の (1) (2) の証明を完成させよ: 「 ε を任意の正数とする。 $\delta = \boxed{\text{ア}}$ とおくと、 $x, y \in I$ が $|x - y| < \delta$ をみたすとき、 $|f(x) - f(y)| \boxed{\text{イ}} \varepsilon$ である。これは、 $f(x)$ が I 上一様連続であることを示している。」

(1) I 上の関数 $f(x) = 2x$ は I 上一様連続である。

(2) I 上の定数関数 $f(x)$ は I 上一様連続である。

6 形式的に α について $\int_0^1 x^\alpha dx = \frac{1}{\alpha+1}$ を微分して

$$\int_0^1 x^\alpha \log x dx = -\frac{1}{(\alpha+1)^2}$$

を示せ。

7 問題 2 (1) の式の x を $-x^2$ におきかえた式

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - \cdots \quad (|x| < 1)$$

の両辺を積分し、形式的に、無限和と積分とを交換することによって、

$$\tan^{-1}(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots \quad (|x| < 1)$$

を導け。