「微分積分学第 2B」重積分と級数の問題

2004 年度 V 類 S 組　2005.01. 配付

以下は J.U. 氏が収集し、或いは作った問題であり、12 月中旬から 01 月までの講義と演習で、問題として理解でき、解答ができるようになる筈の内容である。今、幾ら高校時代の知識を思い出してできないとしても、恥じることはない！各自解いて、TeX を用いてプリントアウトすると、ちょっと新しい気分になるのでは？（TeX の使用法はできるだけ早く学んでおくと得をすること受け合い。最初は面倒なので TeX ができる人達と一緒のコンピュータ室で学ぶことを勧める）

重積分とその応用

1. 以下の重積分を計算せよ。

(1) $\displaystyle\iint_D (x+y+1)^2 dxdy,\quad D=\{(x,y)\ |\ 0\le y\le 1-x,\ x\ge 0\}$

(2) $\displaystyle\iint_D \frac{dxdy}{\sqrt{1-x^2-y^2}},\qquad D=\left\{(x,y)\ |\ x^2+y^2\le 1\right\}$

(3) $\displaystyle\iint_D e^{-(x^2+y^2)}\,dxdy,\qquad D=\{(x,y)\ |\ x\ge 0,\ y\ge 0\}$

(4) $\displaystyle\iint_D \frac{x+y}{x^2+y^2}\,dxdy,\qquad D=\{(x,y)\mid 0\le y\le x\le 1\}$

(5) $\displaystyle\iint_D \log(x^2+y^2)\,dxdy,\qquad D=\left\{(x,y)\ \middle|\ 1\le x^2+y^2\le 4\ \right\}$

(6) $\displaystyle\iint_{\sqrt{x}+\sqrt{y}\le 1} x\,dxdy$

(7) $\displaystyle\iint_D (x-y)^2\sqrt{1-(x+y)^2}\,dxdy,\qquad D=\left\{(x,y)\ \middle|\ |x+y|\le 1, |x-y|\le 1\right\}$

2. ガンマ関数とベータ関数

ガンマ関数　$\Gamma(x)$、ベータ関数　$B(x,y)$　は、次式で定義された関数である。

$$\Gamma(x)=\int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}dt\qquad(\,x>0\,),\qquad B(x,y)=\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt\qquad(\,x>0,\ y>0\,)$$

ガンマ関数とベータ関数の間には、次の関係がある。

$$B(x,y)=\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}\qquad\qquad(\,x>0,\,y>0\,)$$

(1)　$B\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)=\pi$　を証明せよ。

(2)　$\Gamma(1)$　および　$\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right)$　の値を求めよ。

(3)　$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$　　$(\ x > 0\ )$　を証明せよ。

(4)　$\displaystyle\int_0^1 \frac{x^{\frac{3}{2}}(1-x)^{-\frac{1}{2}}}{(x+1)^3}\,dx = \frac{\sqrt{2}}{8} B\left(\frac{5}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{3\sqrt{2}}{64}\pi$　を証明せよ。(Hint : $\dfrac{2x}{x+1} = t$　とおけ)

3．曲面積、体積

(1)　$a > 0$ を定数とする。円柱 $x^2 + y^2 \leq ax$ と球 $x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2$ の共通部分の体積を求めよ。

(2)　$\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$ と $4xy = z^2$ とで囲まれる部分の体積を求めよ.

(3)　$\sqrt{x} + \sqrt{y} = a$ と $4xy = z^2$ とで囲まれる部分の体積が 1 となるように正の定数 a を定めよ.

(4) 空間内の図形

$$V = \left\{ (x,y,z) \;\middle|\; x + y \leq 1,\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ 0 \leq z \leq \sqrt{2xy} \right\}$$

の体積を求めよ。

(5) $a > 0$ を定数とする。円柱面 $x^2 + y^2 = a^2$ と 2 平面 $x + z = a,\ z = 0$ で囲まれた立体の体積を求めよ。

級数と整級数

1．収束、発散 1

次の級数の収束、発散を調べよ。

(1)　$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$,　　(2)　$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n^2}$,　　(3)　$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$,　　(4)　$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{an+b}$　　$(a > 0,\ b > 0)$,

(5)　$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \log\left(1 + \frac{1}{n}\right)$,　　(6)　$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^\alpha}{n!}$,　　(7)　$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{cn+d}{an+b}\right)^n$　　$(a,b,c,d > 0)$,

(8)　$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{n}$,　　(9)　$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left\{\sqrt{n^\alpha + 1} - \sqrt{n^\alpha - 1}\right\}$　$(\alpha > 0)$

(10)　$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{1+n^\alpha}$　$(\alpha > 0)$,　　(11)　$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n}}{\sqrt{n}}$,　　(12)　$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{n^3+1} - \sqrt{n^3-1}\right)$

(13)　$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left\{\log\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right\}^2$,　　(14)　$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\left(\frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{(-1)^{n-1}}{n}\right)$,　　(15)　$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^\alpha}{n^\beta + 1}$

(16)　$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\log(n+1))^n}$

2．収束・発散 2

(1) α を実数とする。級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} \log\Bigl(1+\frac{1}{n^2}\Bigr)$ の収束・発散を調べよ。

(2) 次の級数の収束・発散を調べよ。

$$(a) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n\, n!}{(2n)!}, \qquad (b) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\exp\left(\frac{1}{n^2}\right) - 1\right)$$

(3) 級数

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)^p}$$

は $p > 1$ のとき収束し、 $p \leq 1$ のとき発散することを示せ。

3. 整級数

(1) $\displaystyle\sum_{n=0}^{k} x^n = \frac{x^{k+1}-1}{x-1} \quad (x \neq 1)$ を x に関して微分せよ。また $|x| < 1$ のとき $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} nx^n$ が収束することを示し, その値を求めよ。(前半部分の代わりに $\lim_{n\to\infty} nx^n = 0 \quad (|x| < 1)$ とせよ。)

(2) 次の整級数の収束半径を求めよ.

$$(i) \qquad \sum_{n=0}^{\infty} (2^n + n)\, x^n, \qquad (ii) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^n}$$

(3) 次の関数を $x = 0$ を中心とする整級数に展開し，その収束半径を求めよ.

$$\frac{1}{1-3x+2x^2}.$$