

「微分積分学第2B」 期末試験 2004年度 V類S組 2005.02.09. 13:20-16:20 井上淳

● 問題は4題、答案用紙は4枚綴りである。良く整理して答案を記入して欲しい。万が一紙が不足した場合は、その旨を明記し、裏にも解答して良い。

● 授業や演習に関する物言い(助言、苦情等)感想を是非記して下さい(試験後1週間以内にe-mailで私宛に送ってくれるのがもっとも望ましい)。それによってボーダーライン付近の点が増えることがあっても、減ることはない!

=====

[1] 平面上の4点A~Dの座標を

$$A = (-1, 0), B = (1, 0), C = (\cos \theta, \sin \theta) (0 < \theta < \pi), D = (0, -1)$$

と定める。三角形ABCの密度を $\rho_3 = \text{定数} > 0$ 、三角形ADBの密度を $\rho_4 = \text{定数} > 0$ とするとき、この四辺形Rの重心の位置 (\bar{x}, \bar{y}) を求め、 θ, ρ_3, ρ_4 で表せ。但し、

$$M = \iint_R \rho(x, y) dx dy \text{ を } R \text{ の質量といい、 } \bar{x} = \frac{1}{M} \iint_R x \rho(x, y) dx dy, \bar{y} = \frac{1}{M} \iint_R y \rho(x, y) dx dy \text{ とする。}$$

[2] 関数 $F(\alpha) = \int_0^1 \frac{\log(1 + \alpha x)}{1 + x^2} dx$ ($\alpha \geq 0$) に対して、以下に答えよ。

(i) $\frac{dF}{d\alpha}$ を α と $\log(1 + \alpha)$ を用いて表せ。

(ii) $F(1)$ を求めよ。(Hint: $F(0) = 0$ より $F(1) = F(1) - F(0) = \int_0^1 \left(\frac{dF}{d\alpha} \right) d\alpha$ である。)

[3] (i) $y = \frac{1}{2}(\sin^{-1} x)^2$ が微分方程式 $(1 - x^2)y'' - xy' = 1$ を満たすことを示せ。

(ii) また、それを用い $y = \frac{1}{2}(\sin^{-1} x)^2$ の整級数展開を求めよ。

[4] Abel の定理を用いて以下の級数の値を求めよ。

$$(i) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4n+1}, \quad (ii) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n(2n+1)}.$$

Hint: Abel の定理: 級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ が収束するとする。

1) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ は $I = [0, 1]$ 上一様収束する。($f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ と記す)

2) $\lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ が成り立つ。

%%%

ヒント: 基本的な関数の原始関数(右辺の関数を微分したものが左辺の被積分関数となる)のリスト。

$$\int x^\alpha dx = \frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1} \quad (\alpha \neq -1), \quad \int \frac{dx}{x} = \log|x|, \quad \int e^x dx = e^x, \quad \int a^x dx = \frac{a^x}{\log a} \quad (a > 0, a \neq 1),$$

$$\int \sin(ax+b) dx = -\frac{1}{a} \cos(ax+b) \quad (a \neq 0), \quad \int \cos(ax+b) dx = \frac{1}{a} \sin(ax+b) \quad (a \neq 0),$$

$$\int \sec^2(ax+b) dx = \frac{1}{a} \tan(ax+b) \quad (a \neq 0), \quad \int \tan(ax+b) dx = -\frac{1}{a} \log|\cos(ax+b)| \quad (a \neq 0),$$

$$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \log \left| \frac{x-a}{x+a} \right| \quad (a \neq 0), \quad \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} \quad (a \neq 0), \quad \int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} \quad (a \neq 0),$$

$$\int \log|x| dx = x \log|x| - x, \quad \int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{1}{2} \left(x \sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \arcsin \frac{x}{a} \right) \quad (a > 0),$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + A}} dx = \log|x + \sqrt{x^2 + A}| \quad (A \neq 0),$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - A}} = \frac{1}{\sqrt{A}} \log \left| \frac{x + \sqrt{x^2 - A}}{\sqrt{A}} \right| \quad (A > 0),$$