

「2004 年度微分積分学第 2」 V 類 S 組期末試験解答例

9 February 2005, 13.20-16.20 井上 淳

[1] 平面上の 4 点  $A \sim D$  の座標を

$$A = (-1, 0), B = (1, 0), C = (\cos \theta, \sin \theta) (0 < \theta < \pi), D = (0, -1)$$

と定める。三角形  $ABC$  の密度を  $\rho_3 = \text{定数} > 0$ 、三角形  $ADB$  の密度を  $\rho_4 = \text{定数} > 0$  とするとき、この四辺形  $R$  の重心の位置  $(\bar{x}, \bar{y})$  を求め、 $\theta, \rho_3, \rho_4$  で表せ。但し、

$$M = \iint_R \rho(x, y) dx dy \quad \text{を } R \text{ の質量といい、} \quad \bar{x} = \frac{1}{M} \iint_R x \rho(x, y) dx dy, \quad \bar{y} = \frac{1}{M} \iint_R y \rho(x, y) dx dy \quad \text{とする。}$$

解答例 [25] : 四辺形  $R = \triangle ABC \cup \triangle ADB$ ,

$$\rho(x, y) = \begin{cases} \rho_3 & \text{for } (x, y) \in \triangle ABC, \\ \rho_4 & \text{for } (x, y) \in \triangle ADB, \end{cases}$$

とし、まず質量を計算すると

$$M = \iint_R \rho(x, y) dx dy = \rho_3 \iint_{\triangle ABC} dx dy + \rho_4 \iint_{\triangle ADB} dx dy = \rho_3 \sin \theta + \rho_4$$

である。一方、三角形  $ABC$  の辺の座標表示は

$$AC = \{(x, y) \mid y = \frac{\sin \theta}{\cos \theta + 1}(x + 1), 0 < \theta < \pi\}, BC = \{(x, y) \mid y = \frac{\sin \theta}{\cos \theta - 1}(x - 1), 0 < \theta < \pi\}$$

となるから、 $\alpha_y = \frac{(\cos \theta + 1)y}{\sin \theta} - 1, \beta_y = \frac{(\cos \theta - 1)y}{\sin \theta} + 1$  として、

$$\iint_{\triangle ABC} x dx dy = \int_0^{\cos \theta} \left( \int_{\alpha_y}^{\beta_y} x dx \right) dy = \int_0^{\cos \theta} \frac{2(\sin \theta - y)y \cos \theta}{\sin^2 \theta} dy = \frac{\sin \theta \cos \theta}{3},$$

$$\iint_{\triangle ABC} y dx dy = \int_0^{\cos \theta} \left( \int_{\alpha_y}^{\beta_y} dx \right) y dy = \int_0^{\cos \theta} \frac{2(\sin \theta - y)}{\sin \theta} y dy = \frac{\sin^2 \theta}{3}.$$

一方

$$\iint_{\triangle ADB} x dx dy = \int_{-1}^0 \left( \int_{-y-1}^{1+y} x dx \right) dy = 0, \quad \iint_{\triangle ADB} y dx dy = \int_{-1}^0 \left( \int_{-y-1}^{1+y} dx \right) y dy = -\frac{1}{3}.$$

積分の領域分割に関する定理から

$$\iint_R x \rho(x, y) dx dy = \rho_3 \iint_{\triangle ABC} x dx dy + \rho_4 \iint_{\triangle ADB} x dx dy = \frac{\rho_3 \sin \theta \cos \theta}{3},$$

$$\iint_R y \rho(x, y) dx dy = \rho_3 \iint_{\triangle ABC} y dx dy + \rho_4 \iint_{\triangle ADB} y dx dy = \frac{\rho_3 \sin^2 \theta}{3} - \frac{\rho_4}{3},$$

故に

$$\bar{x} = \frac{1}{M} \iint_R x \rho(x, y) dx dy = \frac{\rho_3 \sin \theta \cos \theta}{3(\rho_3 \sin \theta + \rho_4)}$$

$$\bar{y} = \frac{1}{M} \iint_R y \rho(x, y) dx dy = \frac{\rho_3 \sin^2 \theta - \rho_4}{3(\rho_3 \sin \theta + \rho_4)}. \quad \square$$

[2] 関数  $F(\alpha) = \int_0^1 \frac{\log(1+\alpha x)}{1+x^2} dx$  ( $\alpha \geq 0$ ) に対して、以下に答えよ。

(i)  $\frac{dF}{d\alpha}$  を  $\alpha, 1+\alpha^2$  と  $\log(1+\alpha)$  を用いて表せ。

(ii)  $F(1)$  を求めよ。(Hint:  $F(0) = 0$  より  $F(1) = F(1) - F(0) = \int_0^1 \left(\frac{dF}{d\alpha}\right) d\alpha$  である。)

解答例 [25]: (i)  $F(\alpha)$  を  $\alpha$  で微分するのだが、形式的に、微分を積分記号下で実行し、部分分数分解

$$\frac{x}{(1+x^2)(1+\alpha x)} = \frac{1}{1+\alpha^2} \left\{ \frac{x}{1+x^2} + \frac{\alpha}{1+\alpha^2} - \frac{\alpha}{1+\alpha x} \right\}$$

を用いると

$$\begin{aligned} \frac{dF(\alpha)}{d\alpha} &= \frac{d}{d\alpha} \int_0^1 \frac{\log(1+\alpha x)}{1+x^2} dx = \int_0^1 \frac{d}{d\alpha} \frac{\log(1+\alpha x)}{1+x^2} dx = \int_0^1 \frac{x}{(1+x^2)(1+\alpha x)} dx \\ &= \frac{1}{1+\alpha^2} \left\{ \frac{1}{2} \log 2 + \frac{\pi}{4} \alpha - \log(1+\alpha) \right\} \end{aligned}$$

となる。積分と微分の順序変更が許されることの証明 (これは示さなくとも良い):

$$\frac{dF(\alpha)}{d\alpha} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(\alpha+h) - F(\alpha)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \int_0^1 \frac{\log(1+h\frac{x}{1+\alpha x})}{h(1+x^2)} dx,$$

ここで、 $z = \frac{x}{1+\alpha x}$  とおくと  $0 \leq z \leq 1$  であり、収束

$$\frac{1}{h} \log(1+hz) \rightarrow z \quad (h \rightarrow 0)$$

は  $z \in [0, 1]$  に関し一様だから、極限と積分の順序が変更できて、上で行なった順序変更が正当化できる。  $\square$

(ii) (i) 及びヒントと

$$\int_0^1 \frac{1}{1+\alpha^2} d\alpha = \tan^{-1} \alpha \Big|_0^1 = \frac{\pi}{4}, \quad \int_0^1 \frac{\alpha}{1+\alpha^2} d\alpha = \frac{1}{2} \log(1+\alpha^2) \Big|_0^1 = \frac{1}{2} \log 2$$

を用い、『 $x \in [0, 1]$  に関し一様に  $\lim_{\alpha \rightarrow 1} \log(1+\alpha x) = \log(1+x)$  だから、極限と積分の順序が変更できて』(これは示さなくとも良い)、

$$\begin{aligned} F(1) &= \lim_{\alpha \rightarrow 1} F(\alpha) = \lim_{\alpha \rightarrow 1} \int_0^1 \frac{\log(1+\alpha x)}{1+x^2} dx = \int_0^1 \frac{\log(1+x)}{1+x^2} dx \\ &= \int_0^1 \left(\frac{dF}{d\alpha}\right) d\alpha = \int_0^1 \frac{1}{1+\alpha^2} \left\{ \frac{1}{2} \log 2 + \frac{\pi}{4} \alpha - \log(1+\alpha) \right\} d\alpha \\ &= \frac{1}{2} \log 2 \int_0^1 \frac{1}{1+\alpha^2} d\alpha + \frac{\pi}{4} \int_0^1 \frac{\alpha}{1+\alpha^2} d\alpha - \int_0^1 \frac{\log(1+\alpha)}{(1+\alpha^2)} d\alpha = \frac{\pi}{8} \log 2. \quad \square \end{aligned}$$

注意:(これは示さなくとも良い) というところに気がついてそれを示した者にはボーナス点を与える。

[3] (i)  $y = \frac{1}{2}(\sin^{-1} x)^2$  が微分方程式  $(1-x^2)y'' - xy' = 1$  を満たすことを示せ。

(ii) また、それを用い  $y = \frac{1}{2}(\sin^{-1} x)^2$  の整級数展開を求めよ。

解答例 [25]: (i)  $z = \sin^{-1} x$  ( $-\pi/2 \leq z \leq \pi/2, -1 \leq x \leq 1$ ) とおくと  $\sin z = x$  だから

$$z' = \frac{1}{\cos z}, \quad z'' = \frac{\sin z \cdot z'}{\cos^2 z}, \quad 1-x^2 = \cos^2 z$$

となる。 $y' = z z', y'' = (z')^2 + z z''$  にこれらの式を代入して

$$(1-x^2)y'' - xy' = 1, \quad \text{かつ} \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0, \quad y''(0) = 1$$

となる。

(ii) この微分方程式を  $n$  回微分して、Leibnitz の公式から、

$$[(1-x^2)y'']^{(n)} = (1-x^2)y^{(n+2)} - 2xny^{(n+1)} - n(n-1)y^{(n)}, \quad [xy']^{(n)} = xy^{(n+1)} + ny^{(n)},$$

故に

$$y^{(n+2)}(0) - n^2y^{(n)}(0) = 0 \quad (n \geq 1) \quad \text{かつ} \quad y^{(2)}(0) = 1, \quad y^{(3)}(0) = 0, \quad y^{(4)}(0) = 4, \quad y^{(5)}(0) = 0$$

これより数学的帰納法で

$$y(0) = 0, \quad y^{(2n)}(0) = \frac{(2n-2)!!}{(2n-1)!!} \frac{(2n)!}{2n} (n \geq 1), \quad y^{(2n+1)}(0) = 0 (n \geq 0)$$

が示される。結局

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} y^{(n)}(0) \frac{x^n}{n!} = \frac{x^2}{2} + \frac{2!!}{3!!} \frac{x^4}{4} + \frac{4!!}{5!!} \frac{x^6}{6} + \cdots + \frac{(2n-2)!!}{(2n-1)!!} \frac{x^{2n}}{2n} + \cdots. \quad \square$$

( $y(x) = \sum_{n=2}^{\infty} c_n x^n$  として微分方程式に形式的に代入  $x^n$  の係数を比較して  $c_n$  を定めていく方法もある。)

[4] Abel の定理を用いて以下の級数の値を求めよ。

$$(i) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4n+1}, \quad (ii) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n(2n+1)}.$$

Hint: Abel の定理: 級数  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  が収束するとする。

1)  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  は  $I = [0, 1]$  上一様収束する。 ( $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  と記す)

2)  $\lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$  が成り立つ。

[略解例] (i)[15]: 次式

$$\frac{1}{1+x^4} = 1 - x^4 + x^8 - \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{4n} \quad (|x| < 1)$$

は区間  $I_\delta = [0, 1-\delta]$  (任意の  $\delta > 0$ ) で一様収束。故に項別積分できて

$$\int_0^x \frac{1}{1+y^4} dy = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4n+1} x^{4n+1} \quad (|x| \leq 1-\delta).$$

交代級数和に関する Leibnitz の定理より  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4n+1}$  は収束する。故に、問題中に述べた Abel の定理より上式の右辺は  $x=1$  まで連続であり、左辺の積分の上端を  $x=1$  ととれる。これより

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4n+1} = \int_0^1 \frac{1}{1+y^4} dy.$$

一方、任意の有理関数は原始関数を持ち、実際

$$\int \frac{1}{1+y^4} dy = \frac{1}{4\sqrt{2}} \log \frac{x^2 + \sqrt{2}x + 1}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} + \frac{1}{2\sqrt{2}} [\arctan(\sqrt{2}x + 1) + \arctan(\sqrt{2}x - 1)]$$

となる。だから

$$\int_0^1 \frac{1}{1+y^4} dy = \frac{1}{4\sqrt{2}} \log \frac{2 + \sqrt{2}}{2 - \sqrt{2}} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \left[ \frac{\pi}{2} \right]$$

となる。

(ii)[10]: 上記と同じ理由で関数  $g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(2n+1)} x^{2n+1}$  は  $[0, 1]$  上一様収束し、項別微分して

$$g'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} x^{2n} = \log(1+x^2), \quad g(0) = 0$$

Abel の定理より  $g(1-0)$  が求めたい値で、それは部分積分すれば

$$\int_0^1 \log(1+x^2) dx = [x \log(1+x^2)]|_0^1 - \int_0^1 dx \frac{2x^2}{1+x^2} = \log 2 - 2 + [\arctan x]|_0^1 = \log 2 - 2 + \frac{\pi}{2}.$$