

# 微分積分学第二B V類S組 第10回講義内容(12月14日)

中間試験実施:

日時: 12月17日(金曜日) 10時40分—12時10分+α

試験場: 本館 H121 教室、

試験範囲: 1次元 Riemann 積分(広義積分も含む) 微分方程式は含まない!

%%%

## 1 積分(1変数)

## 2 不定積分と微分方程式

## 3 広義積分(1変数)

## 4 多次元 Riemann 積分

### 4.1 長方形閉領域での重積分について

前回講義後の質問について、前回の講義録に載せておいた事柄について説明した後、新しい小節の説明に入る。

### 4.2 より一般的な領域での重積分

定義 4.1  $\mathbb{R}^n$  の有界集合  $A$  に対し有界閉区間  $I$  を  $A \subset I$  なるように取り、 $A$  上の関数  $f$  を拡張して  $\tilde{f}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  を以下のように定める:

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & x \in A, \\ 0, & x \notin A. \end{cases}$$

この  $\tilde{f}$  が  $I$  上で  $R$  可積分のとき、 $f$  は  $A$  上で  $R$  可積分といい<sup>1</sup>

$$\int_A f = \int_I \tilde{f}$$

よって、 $f$  の  $A$  上の積分  $\int_A f$  を定義する。

命題 4.1  $f$  の  $A$  における  $R$  可積分性及びその積分値  $\int_A f$  は、定義に用いた  $A \subset I$  なる  $I$  の取り方によらない。

定義 4.2  $A$  の特性関数  $\chi_A$  が  $I$  上で  $R$  可積分のとき、集合  $A$  を体積確定(或いは Jordan 可測)であるといい、

$$|A| = \int_I \chi_A(x) dx$$

を  $A$  の ( $n$  次元) 体積と言う。2次元体積を面積、1次元体積を長さという。

<sup>1</sup>以下で  $I$  の取り方によらず well-defined なことを示す

命題 4.2  $\mathbb{R}^n$  の有界集合  $A$  に対し有界閉区間  $I$  を  $A \subset I$  なるように取る。  $A$  上の関数  $f$  を拡張して  $\tilde{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  とするとき、

(1)  $f$  は  $A$  上で  $R$  可積分  $\iff \tilde{f}\chi_A$  は  $I$  上で  $R$  可積分、

(2)  $f$  が  $A$  上  $R$  可積分ならば、  $B \subset A$  となる任意の体積確定集合  $B$  に対して  $f$  の  $B$  への制限は  $B$  上  $R$  可積分である、

(3)  $B \subset A$  で  $f$  が  $B$  上  $0$  に等しければ、『 $f$  は  $A$  上で  $R$  可積分  $\iff f$  は  $A \setminus B$  上で  $R$  可積分』で、このとき  $\int_A f = \int_{A \setminus B} f$  となる。

面積確定しない集合  $A = \{(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1] \mid x, y \text{ は有理数}\}$  とおく。どんな数も有理数で近似出来ることから  $0 = \underline{A} < \bar{A} = 1$  なることが分かる。即ち、 $A$  は面積確定しない集合である。

関数のグラフによって定まる集合の面積 高校時代に、 $[a, b]$  上の  $f(x) \geq 0$  なる連続関数  $f$  があたえられたとき、曲線  $y = f(x)$ 、 $x$  軸、直線  $x = a$ 、 $x = b$  で囲まれる図形  $D$

$$D = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}$$

の面積は  $|D| = \int_a^b f(x)dx$  と表されると教えられた。実際、区間  $[a, b]$  の分割  $\Delta$  に対し  $s[\Delta]$  は  $D$  に含まれる長方形和の面積、 $S[\Delta]$  は  $D$  を含む長方形和の面積となるから  $|\Delta| \rightarrow 0$  として、面積  $|D|$  が存在して  $s[\Delta] \leq |D| \leq S[\Delta]$  となる。一方で  $M = \sup_{x \in [a, b]} f(x)$  とおくと  $D \subset I = [a, b] \times [0, M]$  だから

$$\begin{aligned} |D| &= \iint_D 1 dx dy = \iint_I \chi_D(x, y) dx dy \\ &= \int_a^b \left[ \int_0^M \chi_D(x, y) dy \right] dx = \int_a^b f(x) dx. \end{aligned}$$

ここで  $\int_0^M \chi_D(x, y) dy = f(x)$  を用いたが、高校時代に教えられたことは正しかったことになる。

定理 4.1 区間  $[a, b]$  上で連続な関数  $\phi(x)$ 、 $\psi(x)$  が与えられ、 $\phi(x) \leq \psi(x)$  なるものとする。このとき、縦領域  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b, \phi(x) \leq y \leq \psi(x)\}$  上で連続な関数  $f$  は可積分であり、

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b \left[ \int_{\phi(x)}^{\psi(x)} f(x, y) dy \right] dx.$$

横領域の場合は  $x$  と  $y$  の役割を交換すれば良い。

系 4.1 区間  $[a, b]$  上で連続な関数  $f(x)$ 、 $g(x)$  が与えられ、 $f(x) \geq g(x)$  なるものとする。このとき、曲線  $y = f(x)$ 、 $y = g(x)$  と直線  $x = a$  及び  $x = b$  とで囲まれる図形  $D$  の面積  $S$  は

$$S = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx$$

で与えられる。

定理 4.2 面積を持つ有界閉領域上の連続関数は *Riemann* 積分可能である。

証明：有界閉領域を  $D$  とし、 $D$  を含む大矩形  $K$  をとる。 $K$  の分割  $\Delta = \cup \Delta_{ij}$  に対し、小矩形  $\Delta_{ij}$  のうち  $D$  の内と外にまたがるものを  $\Delta_b$ 、またがらない部分を  $\Delta_o$  と記す。 $D$  は面積を持つから、任意の  $\epsilon > 0$  に

対して、ある分割  $\Delta$  があって  $\Delta_b$  の面積の総和は  $\sum_{\Delta_b} |\Delta_{ij}| < \epsilon$  となる。一方、 $f$  は  $D$  で一様連続だから、ある  $\delta > 0$  があって分割  $\Delta$  の最大幅が  $\delta$  以下ならば  $M_{ij} - m_{ij} < \epsilon$  とできる。  $|f(x, y)| \leq M$  とし、

$$\begin{aligned} \bar{R}(f, \Delta) - \underline{R}(f, \Delta) &= \sum_{i,j} [M_{ij} - m_{ij}] |\Delta_{ij}| = \sum_{\Delta_{ij} \in \Delta_b} [M_{ij} - m_{ij}] |\Delta_{ij}| + \sum_{\Delta_{ij} \in \Delta_o} [M_{ij} - m_{ij}] |\Delta_{ij}| \\ &\leq \sum_{\Delta_{ij} \in \Delta_b} 2M |\Delta_{ij}| + \sum_{\Delta_{ij} \in \Delta_o} \epsilon |\Delta_{ij}| \leq (2M + |K|) \epsilon. \quad \square \end{aligned}$$

注意：この定理により、面積を持つ有界閉領域上には  $\mathbb{R}$  可積分な実数値関数は沢山あることが保証された。例えば、その状況下では関数が無い（観測値を関数とみなすと、観測や実験ができない状態）ときに、そこで微積分を展開しても無駄な努力であろう！

定理 4.3  $A$  を  $\mathbb{R}^n$  の有界集合とする。

(1) [線形性]  $A$  上  $\mathbb{R}$  可積分な実数値関数全体を  $\mathcal{R}(A)$  とすると、これは実ベクトル空間をなし、写像  $f \rightarrow \int_A f$  は  $\mathcal{R}(A)$  上の線形写像である。

(2) [単調性]  $f \leq g$  ならば  $\int_A f \leq \int_A g$  であり、特に、共に体積確定な  $A \subset B$  に対して  $|A| \leq |B|$  である。

(3) [平行移動不変性]  $f$  が  $A+c$  上  $\mathbb{R}$  可積分ならば、 $f \circ T_c$  は  $A$  上  $\mathbb{R}$  可積分で  $\int_{A+c} f = \int_A f \circ T_c$  となる。特に、 $A$  が体積確定ならば、 $A+c$  もそうであり  $|A+c| = |A|$  が成り立つ。

(4) [三角不等式]  $f$  が  $A$  上  $\mathbb{R}$  可積分ならば、 $|f|$  も  $A$  上  $\mathbb{R}$  可積分で  $|\int_A f| \leq \int_A |f|$  となる。

(5) [積の  $\mathbb{R}$  可積分性]  $f, g$  が有界な  $\mathcal{R}(A)$  の元のとき、 $fg \in \mathcal{R}(A)$  である。

(6) [第一平均値の定理]  $A$  が体積確定で、 $m \leq f \leq M$  ならば、 $\mu \in [m, M]$  があって  $\int_A f = \mu |A|$  となる。

定義 4.3  $A$  が Jordan 測度 0 (或いは、体積 0) 集合であるとは、任意の  $\epsilon > 0$  に対し適当な有限個の有界閉区間列  $(I_k)_{k=1}^m$  があって

$$A \subset \bigcup_{k=1}^m I_k, \quad \sum_{k=1}^m |I_k| < \epsilon,$$

となるものが存在することである。

命題 4.3 任意の有界関数  $f$  は体積 0 の集合  $A$  上で  $\mathbb{R}$  可積分で  $\int_A f = 0$  となる。

定理 4.4 (積分範囲に関する加法性)  $A, B$  は共に  $\mathbb{R}^n$  の有界集合で  $|A \cap B| = 0$  とし、 $f: A \cup B \rightarrow \mathbb{R}$  は有界関数とする。

(1)  $f$  が  $A$  及び  $B$  上で  $\mathbb{R}$  可積分ならば、 $A \cup B$  上でも  $\mathbb{R}$  可積分で以下が成り立つ：

$$\int_{A \cup B} f = \int_A f + \int_B f \quad (1)$$

(2) 逆に  $f$  が  $A \cup B$  上で  $\mathbb{R}$  可積分で、 $A, B$  が体積確定ならば、 $f$  は  $A$  及び  $B$  上で  $\mathbb{R}$  可積分で(1) が成立する。

定理 4.5 (体積の有限加法性) (1)  $A, B$  が  $\mathbb{R}^n$  の有界な体積確定集合ならば、 $A \cup B, A \cap B, A \setminus B$  も体積確定で以下が成り立つ：

$$|A \cup B| + |A \cap B| = |A| + |B| \quad (2)$$

$$|A \setminus B| = |A| - |A \cap B| \quad (3)$$

(2)  $\mathbb{R}^n \supset A_1, A_2, \dots, A_m$  が有限個の体積確定集合ならば、 $A = \bigcup_{i=1}^m A_i$  は体積確定であり、

$$|\bigcup_{i=1}^m A_i| = \sum_{i=1}^m |A_i| - \sum_{i=1}^{m-1} |\bigcup_{k=1}^i A_k \cap A_{i+1}|. \quad (4)$$

(3) 有限個の体積確定集合  $A_1, A_2, \dots, A_m$  に対し

$$|A_i \cap A_j| = 0 \ (i \neq j) \implies |\cup_{i=1}^m A_i| = \sum_{i=1}^m |A_i|. \quad (5)$$

更に、このとき有界関数  $f$  が  $A$  上  $R$  可積分ならば、 $f$  は各  $A_i$  上で  $R$  可積分で、

$$\int_A f = \sum_{i=1}^m \int_{A_i} f. \quad (6)$$

定義 4.4 集合  $A \subset \mathbb{R}^n$  に対し

$$A^b = \{x \in \mathbb{R}^n \mid (\forall \epsilon > 0)(U(x, \epsilon) \cap A \neq \emptyset \text{ かつ } U(x, \epsilon) \cap A^c \neq \emptyset)\},$$

$$A^\circ = A^\circ = A^i = \{x \in \mathbb{R}^n \mid (\exists \epsilon > 0)(U(x, \epsilon) \subset A \neq \emptyset)\},$$

$$A^e = \{x \in \mathbb{R}^n \mid (\exists \epsilon > 0)(U(x, \epsilon) \subset A^c \neq \emptyset)\},$$

$$\bar{A} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid (\forall \epsilon > 0)(U(x, \epsilon) \cap A \neq \emptyset)\},$$

と定め、それぞれを  $A$  の境界、 $A$  の内部、 $A$  の外部、 $A$  の閉包と言う。

定理 4.6 有界集合  $A \subset \mathbb{R}^n$  に対し以下は同値である。

- (a)  $A$  は体積確定である。
- (b)  $A$  の境界  $A^b$  は零集合である。
- (c)  $A$  の境界  $A^b$  は体積 0 である。

演習問題: 平面  $\mathbb{R}^2$  上の領域 (= 連結開集合)  $A$  の境界  $A^b$  が区分的に  $C^1$  級曲線  $C: z = z(t) \ (t \in I = [a, b])$  であるときは、 $A$  は面積確定である。 $A$  の境界  $A^b$  が単に連続曲線なときは、必ずしも面積確定でない。

連結という言葉を講義中に口走ったが、正確には以下のようなになる (が気にしなくてよい)。

定義 4.5 (連結性)  $\mathbb{R}^n$  の集合  $E$  に対して集合  $A, B$  が存在して

$$E = A \cup B, \ A \neq \emptyset, \ B \neq \emptyset, \ \text{かつ} \ \bar{A} \cap B = \emptyset, \ A \cap \bar{B} = \emptyset$$

と表されるとき、これを  $E$  の分離と呼ぶ。分離できない集合は連結であるという。

系 4.2  $\mathbb{R}^n$  の、開かつ閉なる集合は空集合  $\emptyset$  とそれ自身  $\mathbb{R}^n$  のみである。

定理 4.7  $I$  は  $\mathbb{R}^n$  の有界閉区間、 $\varphi, \psi: I \rightarrow \mathbb{R}$  は共に  $I$  上  $R$  可積分とする。

- (1)  $\varphi, \psi$  のグラフ  $\Gamma_\varphi, \Gamma_\psi$  の  $(n+1)$  次元体積は 0 である。
- (2)  $\varphi, \psi$  が連続で、 $\varphi(x) \geq \psi(x) \ (\forall x \in I)$  ならば、縦線集合

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x \in I, \ \psi(x) \leq y \leq \varphi(x)\}$$

は体積確定である。

(3)  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  が  $A$  上  $R$  可積分で、 $f^x: y \rightarrow f(x, y)$  が区間  $[\psi(x), \varphi(x)]$  上  $R$  可積分 (特に、 $f$  が  $A$  上連続) ならば、

$$\int_A f = \int_I \left[ \int_{\psi(x)}^{\varphi(x)} f(x, y) dy \right] dx. \quad (7)$$

(4)  $A$  の  $(n+1)$  次元体積は

$$|A|_{n+1} = |A| = \int_I (\varphi(x) - \psi(x)) dx. \quad (8)$$

定理 4.8  $D, E$  等を面積を持つ領域、 $f, g$  等を可積分関数とする。このとき、

(i) (領域に関する加法性)  $D \cap E = \emptyset$  とすると、

$$\iint_{D \cup E} f(x, y) dx dy = \iint_D f(x, y) dx dy + \iint_E f(x, y) dx dy.$$

(ii) (線形性)  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  とすると、

$$\iint_D (\alpha f(x, y) + \beta g(x, y)) dx dy = \alpha \iint_D f(x, y) dx dy + \beta \iint_D g(x, y) dx dy$$

(iii) (単調性)  $f(x, y) \leq g(x, y)$  ならば、 $\iint_D f(x, y) dx dy \leq \iint_D g(x, y) dx dy$ .

(iv) (正値性)  $f(x, y) \geq 0$  であり集合  $D_+ = \{(x, y) \in D \mid f(x, y) > 0\}$  の面積が  $0$  でなければ、 $\iint_D f(x, y) dx dy > 0$ .

定理 4.9 (変数変換公式)  $uv$ -平面の領域  $A$  から  $xy$ -平面の領域  $B = \Phi(A)$  への  $C^1$ -級写像  $\Phi$  を考える。即ち、 $\Phi(u, v) = (\phi(u, v), \psi(u, v)) = (x, y)$ 、 $\phi$  や  $\psi$  は  $C^1$ -級とする。 $A$  上  $\Phi$  は 1 対 1 であり  $J(u, v) \neq 0$  とする。この時、 $B$  上で Riemann 可積分な関数  $f$  に対し  $A$  上の関数を  $F(u, v) = f(\phi(u, v), \psi(u, v))$  と定めると、これは  $A$  上で Riemann 可積分で

$$\iint_B f(x, y) dx dy = \iint_A F(u, v) |J(u, v)| du dv$$

となる。

例 (極座標):

$$x = r \cos \theta, y = r \sin \theta, (0 \leq r < \infty, 0 \leq \theta \leq 2\pi)$$

は  $(r, \theta) \in (0, \infty) \times [0, 2\pi] \rightarrow (x, y) \in \mathbb{R}^2$  の写像を与え、その Jacobi 行列式は

$$J(r, \theta) = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix} = r$$

となる。

注意: 原点  $r = 0$  で Jacobi 行列式が  $0$  となり、そこでは積分記号下での変数変換公式がそのままでは成立しないので、積分を  $(r, \theta) \in (0, \infty)$  での広義積分として解釈する。勿論、広義積分については次回に説明するが、1次元の場合から類推しておいて欲しい。

メモ: 受講者 40 名強か? 他の科目の補講と重なり中間試験が受けられない人が 1 名いたが、その人は期末試験時にその旨書いておいて欲しい。そのような事情で受験できない人は期末試験 1 本勝負で! 勿論配点は色々と重みをつけ、中間試験 0 点という採点はしないつもりである。