「微分積分学第2B」 V類S組中間試験解答例 2004.12.17 井上淳

[1] 以下の（広義）積分の値を求めよ。

$$(i)\int_0^1 x^m(\log x)^n dx\ (m>-1),\qquad (ii)\int_a^b \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}\ (a<b),\qquad (iii)\int_{-1}^1 \frac{dx}{(a-x)\sqrt{1-x^2}}\ (a>1).$$

ヒント：(i) 漸化式を考えよ。(ii) 変数変換 $t=\sqrt{(b-x)/(x-a)}$ を用いよ。

解答例：(i)[5 点] $m>-1$ なので $\delta>0$ を $m-\delta>-1$ なるようにとれる。被積分関数の問題になりそうな点0で $x^m(\log x)^n=x^{m-\delta}x^\delta(\log x)^n$ として $x^\delta(\log x)^n$ は $x\to 0$ のとき n が何であっても0に収束することは示せるので、積分の下端で広義積分として意味がつく。そこで部分積分を用いて

$$I_{m,n}=\int_0^1 x^m(\log x)^n dx=\frac{x^{m+1}}{m+1}(\log x)^n\Big|_0^1-\frac{n}{m+1}\int_0^1 x^m(\log x)^{n-1}dx=-\frac{n}{m+1}I_{m,n-1}.$$

これを繰り返して

$$I_{m,n}=(-1)^n\frac{n!}{(m+1)^n}I_{m,0},\ I_{m,0}=\frac{1}{m+1},\quad \text{だから}\quad I_{m,n}=(-1)^n\frac{n!}{(m+1)^{n+1}}.\qquad\square$$

(ii)[5 点] 変数変換 $t=\sqrt{(b-x)/(x-a)}$ を用いると、

$$x=\frac{at^2+b}{t^2+1},\quad (x-a)(x-b)=\frac{(b-a)^2t^2}{(t^2+1)^2},\quad \frac{dx}{dt}=\frac{2(a-b)t}{(t^2+1)^2},\quad (a,b]\ni x\to -t\in[0,\infty),$$

となるから

$$\int_a^b\frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}=\int_0^\infty\frac{2}{t^2+1}dt=2\mathrm{arctan}\,t\Big|_0^\infty=\pi.\qquad\square$$

(iii)[5 点] $t=\sqrt{(1-x)/(1+x)}$ と変数変換すると

$$x=\frac{1-t^2}{1+t^2},\quad \frac{dx}{dt}=\frac{-4t}{(t^2+1)^2},\quad (a-x)\sqrt{1-x^2}=\frac{(a+1)t^2+a-1}{1+t^2}\frac{2t}{1+t^2},\quad (-1,1]\ni x\to -t\in[0,\infty)$$

$$\int_{-1}^1\frac{dx}{(a-x)\sqrt{1-x^2}}=\int_0^\infty\frac{2dt}{(a+1)t^2+a-1}=\frac{2}{\sqrt{a^2-1}}\arctan\left(\sqrt{\frac{a+1}{a-1}}t\right)\Big|_0^\infty=\frac{\pi}{\sqrt{a^2-1}}.\qquad\square$$

[2] 次の不定積分を求めよ。

$$(i)\int\arccos(3x)\,dx,\qquad (ii)\int\frac{1}{x+2\sqrt{x-1}}\,dx,\qquad (iii)\int\frac{x}{(x-a)\sqrt{x+b}}dx.$$

解答例：(i)[5 点] 逆三角関数の微分は有理関数または無理関数なので、部分積分を用いて、それらの微分に帰着させることを考えるとよい。$x'=1$ だから、

$$\int\arccos(3x)\,dx=x\arccos(3x)-\int x(\arccos(3x))'\,dx=x\arccos(3x)-\frac{1}{3}\sqrt{1-9x^2}.\qquad\square$$

勿論 $y=\arccos(3x)$ とおくき、$3x=\cos y,\ 3dx/dy=-\sin y$ を用いて

$$\begin{aligned}\int\arccos(3x)\,dx&=\int y\frac{-\sin y dy}{3}=-\frac{1}{3}\int y(-\cos y)'dy\\&=\frac{1}{3}y\cos y-\frac{1}{3}\mathrm{sin}y=x\arccos(3x)-\frac{1}{3}\sqrt{1-9x^2}\end{aligned}$$

としてもよい。ここで、$\sin y=\sin(\arccos(3x))$ としたものはあまりにも綺麗でない故に、また、y のままで変数を x に戻していない解答は減点する。

(ii)[5 点] $y=\sqrt{x-1}$ とおくと $x=y^2+1$、$dx/dy=2y$ だから

$$\int \frac{1}{x+2\sqrt{x-1}}dx = \int \frac{2y}{y^2+2y+1}dy = \log(y^2+2y+1) - \int \frac{2}{y^2+2y+1}dy$$

$$= \log(y^2+2y+1) - 2\arctan(y+1) = \log(x+\sqrt{x-1}) - 2\arctan(1+\sqrt{x-1})$$

$$\text{別表示 1} = \int \frac{2(y+1)-2}{(y+1)^2}dy = 2\log(y+1) + 2\frac{1}{y+1}$$

$$= 2\log(\sqrt{x-1}+1) + 2\frac{1}{\sqrt{x-1}+1}$$

$$\text{別表示 2} = 2\int y\left(-\frac{1}{y+1}\right)' dy = -\frac{2y}{y+1} + \log(y+1)$$

$$= -\frac{2\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-1}+1} + 2\log(\sqrt{x-1}+1). \qquad \square$$

(iii)[5 点] 変数変換 $t=\sqrt{x+b}$, $x=t^2-b$, $dx=2tdt$,

$$\int \frac{x}{(x-a)\sqrt{x+b}}dx = 2\int \frac{t^2-b}{t^2-a-b}dt$$

$$= \begin{cases} \int (2+\frac{a}{\sqrt{a+b}}\left(\frac{1}{t-\sqrt{a+b}} - \frac{1}{t+\sqrt{a+b}}\right)dt = 2\sqrt{x+b} + \frac{a}{\sqrt{a+b}}\log\left|\frac{\sqrt{x+b}-\sqrt{a+b}}{\sqrt{x+b}+\sqrt{a+b}}\right|, & a+b>0 \\ 2\int (1+\frac{a}{t^2+|a+b|})dt = 2t + \frac{2a}{|a+b|}\arctan\frac{t}{|a+b|} = 2\sqrt{x+b} + \frac{2a}{\sqrt{|a+b|}}\arctan\frac{\sqrt{x+b}}{\sqrt{|a+b|}}, & a+b<0 \\ 2\int (1-\frac{b}{t^2})dt = \frac{2(x+2b)}{\sqrt{x+b}}, & a=b. \end{cases}$$