Taylorの定理とその応用

2007年1類M組　11 July 2007 Home Page 掲載　井上淳

1　1変数の場合

1.1　Taylorの定理

定理 1.1 (Taylorの定理) 区間 I 上で $f \in C^n(I)$ とすると、

$$f(x) = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{j!} f^{(j)}(a)(x-a)^j + R_n$$

となる。ここで

$$R_n = \begin{cases} \dfrac{1}{n!}(x-a)^n f^{(n)}(a+\theta(x-a)), & (\exists\theta \in (0,1)), \\ \dfrac{(1-\theta)^{n-1}}{(n-1)!}(x-a)^n f^{(n)}(a+\theta(x-a)), & (\exists\theta \in (0,1)), \end{cases}$$

等と表現される。

1.1.1　数値を求める

応用例 1：$(1+x)^{1/2}$ を微分して、

$$f(x) = (1+x)^{1/2},\ f'(x) = \frac{1}{2}(1+x)^{-1/2},\ f''(x) = \frac{1}{2}\Big(\frac{-1}{2}\Big)(1+x)^{-3/2},$$
$$f^{(3)}(x) = \frac{1}{2}\Big(\frac{-1}{2}\Big)\Big(\frac{-3}{2}\Big)(1+x)^{-5/2},\ f^{(k)}(x) = \frac{1}{2}(-1)^{k-1}\frac{(2k-3)!!}{2^{k-1}}(1+x)^{-(2k-1)/2},$$

但し

$$(2k-1)!! = \begin{cases} 1\cdot 3\cdots(2k-1), & 2k-1>0, \\ 1, & 2k-1 \le 0, \end{cases} \qquad (\text{比較：})n! = \begin{cases} 1\cdot 2\cdots n, & n>0, \\ 1, & n\le 0. \end{cases}$$

Taylorの定理より

$$(1+x)^{1/2} = 1 + \frac{1}{2}\frac{x}{1!} - \frac{1}{4}\frac{x^2}{2!} + \frac{3}{8}\frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{1}{2}(-1)^{n-2}\frac{(2n-3)!!}{2^{n-2}}\frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + R_n,$$

$$R_n = \begin{cases} \dfrac{1}{2}(-1)^{n-1}\dfrac{(2n-1)!!}{2^{n-1}}(1+\theta x)^{-(2n-1)/2}\dfrac{x^n}{n!}, & (\exists\theta \in (0,1)), \\ \dfrac{1}{2}(-1)^{n-1}\dfrac{(2n-1)!!}{2^{n-1}}(1+\theta x)^{-(2n-1)/2}\dfrac{(1-\theta)^{n-1}x^n}{(n-1)!}, & (\exists\theta \in (0,1)), \end{cases}$$

と書ける。特に、手持ちのポケコンで計算すると

$$\sqrt{101} = (10^2+1)^{1/2} = 10(1+10^{-2})^{1/2} \fallingdotseq 10.04987562.$$

この値を小数点以下第4桁まで手で計算して求める。10倍するのだから、$(1+10^{-2})^{1/2}$ にTaylorの定理を適用し、その剰余項の小数点以下第6桁の値が切り上がらないようしたい。そこで、$x = 10^{-2}$ として R_n を最大にし、

$$R_n \le \frac{1}{2}\frac{(2n-1)!!}{2^{n-1}}\frac{(10^{-2})^n}{n!} < 5\times 10^{-7}$$

なるように n を決める。$n=3$ とすれば、剰余項は

$$\frac{5!!}{2^3}\frac{10^{-6}}{3!} = 0.0000003125 < 0.0000004 < 5\times 10^{-7}$$

となる。$n=2$ まではきちっと計算できて

$$\begin{aligned} 1+0.005-0.0000125&-0.0000004 = 1.0049871 \\ &< \sqrt{101}/10 < 1+0.005-0.0000125+0.0000004 = 1.0049879 \end{aligned}$$

となる。10 倍して、 $\sqrt{101} = 1.00498\cdots$ となる。ところで、剰余項を $n=2$ とすれば、

$$\frac{1}{16}10^{-4} = 0.0000125 (> 5\times 10^{-7} = 0.0000005)$$

だから

$$10(1+0.005) - 0.000125 = 10.049875 < \sqrt{101} < 10(1+0.005) + 0.0000125 = 10.050125$$

となり、小数点第 1 桁しかあわない。 □

応用例 2：$\sin x$ の微分は、$\sin^{(n)}(x) = \sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)$ と書ける。故に、$x=0$ で展開し剰余項を求めると、

$$\sin x = \begin{cases} \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1} + R_{2n}, \\ \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1} + R_{2n+1}, \end{cases} \qquad \begin{cases} R_{2n} = (-1)^n \sin(\theta x)\dfrac{x^{2n}}{(2n)!}, \\ R_{2n+1} = (-1)^n \cos(\theta x)\dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \end{cases}$$

となる。radian で $x = \pi\times 10^{-2} \fallingdotseq 0.0314159$ ($x = 1.8^\circ$) とし、$\sin\pi\times 10^{-2}$ を小数点以下第 4 位まで求めるために、剰余項を評価する。

$$|R_{2n+1}| \le \frac{0.0314159^\ell}{\ell!} < 5\times 10^{-5}$$

となるように $\ell = 3$ ととる。即ち、R_3 は

$$0.031415 < x < 0.031416, \quad 0.031416^3/6 < 0.0000310065/6 = 0.000005167 < 5\times 10^{-5},$$

だから

$$0.031415 - 0.0000052 = 0.031408 < \sin\pi\times 10^{-2} < 0.031416 - \frac{1}{3!}0.031416^3 < 0.031411.$$

故に、$\sin 1.8^\circ = 0.0314\cdots$。手持ちのポケコンで計算すると

$$\sin 1.8^\circ \fallingdotseq 0.031410759.$$

応用例 3：e^x を $x=1$ で Taylor 展開すると、

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \frac{e^\theta}{(n+1)!} \quad (0<\theta<1).$$

$2 < e < 3$ は既知だから、e の近似値として $2 + 1/2! + \cdots + 1/n!$ をとれば、その誤差は $3/(n+1)!$ より小さい。e の値を小数点以下第 5 位まで求めよう。$3/(n+1)! < 10^{-6}$ を満たす最小の n の値は 9 であるから、$2 + 1/2! + \cdots + 1/9!$ の値を求めるのだが、小数点以下第 8 位以下は切り捨てて計算すると、

$$\begin{aligned} 0.2182812 = 0.1666666 + 0.0416666 + 0.0083333 + 0.0013888 + 0.0001984 + 0.0000248 + 0.0000027 \\ < \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} + \frac{1}{7!} + \frac{1}{8!} + \frac{1}{9!}. \end{aligned}$$

剰余項と切り捨て誤差

$$\text{剰余項} < \frac{3}{10!} < 8.3\times 10^{-7}, \quad \text{切り捨て誤差} < 7\times 10^{-7}$$

を加えて、

$$2.7182812 < e < 2.5 + 0.2182812 + 7\times 10^{-7} + 8.3\times 10^{-7} = 2.71828273.$$

故に、$e = 2.71828\cdots$ となる。 □

1.1.2　Landau の記号とその応用

前にでてきた計算で既に使ったことだが、$\varphi(x) = o(x^n)$、$\psi(x) = o(x^m)(x \to 0)$ ならば

$$\varphi(x) + \psi(x) = o(x^{\min(m,n)}), \quad \varphi(x)\psi(x) = o(x^{m+n}).$$

計算例：$f(x) = (\cos x)^{\sin x}$ を $x = 0$ で 7 次まで展開せよ。

　$\log\, f(x) = \sin x \log(\cos x)$ を考える。

$$\begin{aligned}
\sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^6), \\
\cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + o(x^7), \\
\log(1+y) &= y - \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4} + O(y^5),
\end{aligned}$$

に注意し、$y = \cos\, x - 1 = -\frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + o(x^7)$ として

$$\begin{aligned}
\log f(x) &= \sin x \log(\cos x) \\
&= \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^6)\right)\left(-\frac{x^2}{2!} - \frac{x^4}{12} - \frac{x^6}{45} + o(x^7)\right) \\
&= -\frac{x^3}{2!} - \frac{x^7}{80} + o(x^8),
\end{aligned}$$

となる。更に

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + o(z^3)$$

だから、$z = \log f(x) = -\frac{x^3}{2} - \frac{x^7}{80} + o(x^8)$ として結局

$$f(x) = 1 - \frac{x^3}{2} + \frac{x^6}{8} - \frac{x^7}{80} + o(x^7). \qquad \square$$

1.1.3　Landau の記号とその応用

前にでてきた計算で既に使ったことだが、$\varphi(x) = o(x^n)$、$\psi(x) = o(x^m)(x \to 0)$ ならば

$$\varphi(x) + \psi(x) = o(x^{\min(m,n)}), \quad \varphi(x)\psi(x) = o(x^{m+n}).$$

計算例：$f(x) = (\cos x)^{\sin x}$ を $x = 0$ で 7 次まで展開せよ。

　$\log\, f(x) = \sin x \log(\cos x)$ を考える。

$$\begin{aligned}
\sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^6), \\
\cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + o(x^7), \\
\log(1+y) &= y - \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4} + O(y^5),
\end{aligned}$$

に注意し、$y = \cos\, x - 1 = -\frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + o(x^7)$ として

$$\begin{aligned}
\log f(x) &= \sin x \log(\cos x) \\
&= \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^6)\right)\left(-\frac{x^2}{2!} - \frac{x^4}{12} - \frac{x^6}{45} + o(x^7)\right) \\
&= -\frac{x^3}{2!} - \frac{x^7}{80} + o(x^8),
\end{aligned}$$

となる。更に

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + o(z^3)$$

だから、$z = \log f(x) = -\frac{x^3}{2} - \frac{x^7}{80} + o(x^8)$ として結局

$$f(x) = 1 - \frac{x^3}{2} + \frac{x^6}{8} - \frac{x^7}{80} + o(x^7). \qquad \square$$

1.1.4 極大値、極小値を求める一つの方法

定義 1.1 $f \in C(I)$ が $x = c$ で極大になっているとは、ある $\delta > 0$ があって

$$f(x) \leq f(c), \quad \forall x \in (c - \delta, c + \delta) \cap I$$

となることである。このとき、$f(c)$ を極大値という。

注意：より詳しく、広義の極大とか、極小とかいう概念について、その名前の付け方から定義を類推せよ。

命題 1.1 区間 I で定義された関数 $f \in C^2(I)$ が、区間内の点 c で

$$f'(c) = 0, \quad f''(c) < 0$$

となるならば、関数 f は $x = c$ で極大値をとる。

1.2 Taylor 展開と Maclaurin 展開

定義 1.2 (Taylor 展開) 関数 $f \in C^\infty(I)$ が $x = c$ で *Taylor* 展開可能とは、*Taylor* の定理の剰余項について

$$\lim_{n \to \infty} R_n = 0$$

が成立することである。このとき、

$$f(x) = \sum_{j}^{\infty} \frac{1}{j!} f^{(j)}(c)(x - c)^j$$

と書き、これを *Taylor* 級数と言い、この級数を求めることを、関数 f を $x = c$ で *Taylor* 展開するとも言う。また、$c = 0$ としたものを、*Maclaurin* 級数とも言う。

命題 1.2 以下に主な関数の *Maclaurin* 展開を与える。

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k \quad (-1 < x < 1),$$

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \quad (-\infty < x < \infty),$$

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} \quad (-\infty < x < \infty),$$

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} \quad (-\infty < x < \infty),$$

$$\log(1 + x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k \quad (-1 < x \leq 1),$$

$$(1 + x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha - 1)}{2!} x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha - 1)\cdots(\alpha - n + 1)}{n!} x^n + \cdots \quad (-1 < x < 1, \forall \alpha \in \mathbb{R}).$$

注意：$\lim_{n \to \infty} R_n = 0$ を示すとき、各種の剰余項の表示を用いる。

2 2 変数の場合

2.1 2 変数の Taylor の定理

定理 2.1 (Taylor の定理) 長方形領域 $I \times J$ 上で $f \in C^n(I \times J)$ とすると、

$$f(x, y) = \sum_{j+k=0}^{n-1} \frac{1}{j!k!} \frac{\partial^{j+k} f}{\partial x^j \partial y^k}(a, b)(x - a)^j (y - b)^k + R_n$$

となる。ここで

$$R_n = \sum_{j+k=n} \frac{1}{j!k!}(x-a)^j(y-b)^k \frac{\partial^{j+k} f}{\partial x^j \partial y^k}(a+\theta(x-a), b+\theta(y-b)), \quad (\exists\theta \in (0,1)).$$

2.2 合成関数の微分、偏微分について

2.2.1 １変数の場合

以下、x の属している区間を I、t の属している区間を D とする。

命題 2.1 $f(x) \in C^1(I)$, $\varphi(t) \in C^1(D)$ かつ $\varphi(D) \subset I$ とする。このとき、

$$\frac{d}{dt} f(\varphi(t)) = \dot{f}(\varphi(t))\dot{\varphi}(t).$$

略証：前に述べたの Landau 記号を用いると見通しがよい。微分可能だから

$$f(x+h) - f(x) - \alpha h = o(h), \quad x(t+k) - x(t) - \beta k = o(k),$$

となる $\alpha(= \dot{f}(x)$ 及び $\beta(= \dot{\varphi}(t))$ がある。故に、

$$\begin{aligned} f(x(t+k)) - f(x(t)) &= [f(x(t)) + \alpha(x(t+k) - x(t)) + o(x(t+k) - x(t))] - f(x(t)) \\ &= \alpha[\beta k + o(k)] + o(\beta k + o(k)) = \alpha\beta k + o(k). \quad \square \end{aligned}$$

2.2.2 ２変数の場合

以下、x の属している区間を I、y の属している区間を J、t の属している区間を D 或いは D_t、s の属している区間を D_s とする。

注意：Schwarz の定理によって $f \in C^2(I)$ ならば $\partial_x\partial_y f = \partial_y\partial_x f$, $f_{xy} = f_{yx}$ となる。より一般的に $f \in C^n(I)$ ならばその高階偏微分は、どの独立変数に関し何回偏微分したかには依るが偏微分する順序に依らないから $\partial_x^j\partial_y^k f$ $(j+k \le n)$ 等と表記してよい。

命題 2.2 *(i)* $f(x,y) \in C^1(I \times J)$, $\varphi(t), \psi(t) \in C^1(D)$ かつ $\varphi(D) \subset I$, $\psi(D) \subset J$ とする。このとき、

$$\frac{d}{dt} f(\varphi(t), \psi(t)) = f_x(\varphi(t), \psi(t))\dot{\varphi}(t) + f_y(\varphi(t), \psi(t))\dot{\psi}(t),$$

(ii) $f(x,y) \in C^2(I \times J)$, $\varphi(t), \psi(t) \in C^2(D)$ $\varphi(D) \subset I$, $\psi(D) \subset J$

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2} f(\varphi(t), \psi(t)) =& [f_{xx}(\varphi(t), \psi(t))\dot{\varphi}(t) + f_{yx}(\varphi(t), \psi(t))\dot{\psi}(t)]\dot{\varphi}(t) + f_x(\varphi(t), \psi(t))\ddot{\varphi}(t) \\ &+ [f_{xy}(\varphi(t), \psi(t))\dot{\varphi}(t) + f_{yy}(\varphi(t), \psi(t))\dot{\psi}(t)]\dot{\psi}(t) + f_y(\varphi(t), \psi(t))\ddot{\psi}(t), \end{aligned}$$

(iii) $f(x,y) \in C^2(I \times J)$, $u(t,s), v(t,s) \in C^2(D_t \times D_s)$ $u(D_t, D_s) \subset I$, $v(D_t, D_s) \subset J$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} f(u(t,s), v(t,s)) &= f_x(u(t,s), v(t,s))u_t(t,s) + f_y(u(t,s), v(t,s))v_t(t,s), \\ \frac{\partial}{\partial s} f(u(t,s), v(t,s)) &= f_x(u(t,s), v(t,s))u_s(t,s) + f_y(u(t,s), v(t,s))v_s(t,s), \end{aligned}$$

以降、変数は明示しない：

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial t^2} f(u(t,s), v(t,s)) &= [f_{xx}u_t + f_{yx}v_t]u_t + f_x u_{tt} + [f_{xy}u_t + f_{yy}v_t]v_t + f_y v_{tt}, \\ \frac{\partial^2}{\partial s \partial t} f(u(t,s), v(t,s)) &= [f_{xx}u_s + f_{yx}v_s]u_t + f_x u_{st} + [f_{xy}u_s + f_{yy}v_s]v_t + f_y v_{st}, \\ \frac{\partial^2}{\partial s^2} f(u(t,s), v(t,s)) &= [f_{xx}u_s + f_{yx}v_s]u_s + f_x u_{ss} + [f_{xy}v_s + f_{yy}v_s]v_s + f_y v_{ss}. \end{aligned}$$

2.3 Taylor の定理の証明

$g(t) = f(a+th, b+tk)$ とすると、この関数は t について $C^n(D)$ だから、1 変数の Taylor の定理を用いて

$$f(a+h,b+k) = g(1) = g(0) + g'(0) + \frac{1}{2!}g''(0) + \cdots + \frac{1}{(n-1)!}g^{(n-1)}(0) + \frac{1}{n!}g^{(n)}(\theta) \quad (0<\theta<1).$$

そこで、上に述べた合成関数の微分公式を用いる。

$$\begin{aligned} g'(t) &= hf_x(a+th,b+tk) + kf_y(a+th,b+tk), \\ g''(t) &= h[hf_{xx} + kf_{yx}] + k[hf_{xy} + kf_{yy}] = h^2 f_{xx} + hk(f_{yx} + f_{xy}) + k^2 f_{yy} \\ &= h^2 f_{xx} + 2hk f_{xy} + k^2 f_{yy} = (h\partial_x + k\partial_y)^2 f, \\ g^{(n)}(t) &= (h\partial_x + k\partial_y)^n f = \sum_{j+\ell=n} \binom{n}{j} h^j k^\ell \partial_x^j \partial_y^\ell f. \end{aligned}$$

これより、定理の公式は直ちに導かれる。特に

$$g(t) = \sum_{\ell=0}^{n-1} \frac{1}{\ell!} g^{(\ell)}(0) t^\ell + \frac{1}{n!} g^{(n)}(\theta t) t^n$$

だから剰余項は

$$R_n = \frac{1}{n!} g^{(n)}(\theta) = \sum_{j+k=n} \frac{1}{j!k!}(x-a)^j (y-b)^k \frac{\partial^{j+k} f}{\partial x^j \partial y^k}(a+\theta(x-a), b+\theta(y-b)), \quad (\exists \theta \in (0,1))$$

となる。

2.4 極大値、極小値を求める一つの方法

命題 2.3 長方形領域 $I \times J$ で定義された関数 $f \in C^2(I \times J)$ が、領域の点 (a,b) で

$$f_x(a,b) = f_y(a,b) = 0, \quad \text{かつ} \quad J_f(a,b) = \begin{pmatrix} f_{xx}(a,b) & f_{yx}(a,b) \\ f_{xy}(a,b) & f_{yy}(a,b) \end{pmatrix} \quad \text{が負定値行列}$$

となるとする。すると、関数 f は $(x,y) = (a,b)$ で極大値をとる。

定義 2.1 長方形領域 $I \times J$ で定義された関数 $f \in C^1(I \times J)$ に対し、$f_x(a,b) = f_y(a,b) = 0$ となる点 (a,b) を関数 $f(x,y)$ の停留点 *(stationary point)* という。

定義 2.2 $n \times n$-行列 $A = (a_{ij})$ が負定値行列であるとは、任意の $\xi = {}^t(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \{(0,0,\cdots,0)\}$ に対して

$$\xi \cdot A\xi = \sum_{i=1}^n \xi_i \big(\sum_{j=1}^n a_{ij}\xi_j \big) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}\xi_i\xi_j < 0$$

となることである。

特に $A = \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix}$ が負定値行列となる必要十分条件は

$$a < 0, \ c^2 - ab < 0$$

である。実際、任意の $\xi = {}^t(\xi_1, \xi_2)$ に対して

$$\xi_1(a\xi_1 + c\xi_2) + \xi_2(c\xi_1 + b\xi_2) = a\xi_1^2 + 2c\xi_1\xi_2 + b\xi_2 < 0$$

となるための条件は、上に述べたものである。

命題?? の証明: さて、$f_x(a,b) = 0, \ f_y(a,b) = 0$ だから

$$f(x,y) = f(a,b) + R_2,$$

$$
\begin{aligned}
R_2 &= \frac{1}{2}\big[f_{xx}(\cdots)(x-a)^2 + 2f_{xy}(\cdots)(x-a)(y-b) + f_{yy}(\cdots)(y-b)^2\big] \\
&= \frac{1}{2}(x-a, y-b)\cdot J_f(\cdots)\begin{pmatrix} x-a \\ y-b \end{pmatrix}, \quad J_f(\cdots) = \begin{pmatrix} f_{xx}(\cdots) & f_{yx}(\cdots) \\ f_{xy}(\cdots) & f_{yy}(\cdots) \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

但し、記法上 $(\cdots) = (a+\theta(x-a), b+\theta(y-b))$ とした。$f \in C^2(I \times J)$ であるから、$J_f(a,b)$ は負定値行列という仮定より、$(\cdots)$ が (a,b) の十分近くにあるとき $J_f(\cdots)$ も負定値行列。あとは、１変数の場合と同様の議論で、(x,y) が (a,b) の十分近くにあるとき

$$
f(x,y) \le f(a,b) \quad \text{即ち、} f(x,y) \text{ は } (a,b) \text{ で極大.} \quad \square
$$

注意：$J_f(a,b)$ が負定値でも正定値でもない場合、点 (a,b) が極値を与える点かどうか、一般的な判定はできない。

定義 2.3 一般に点 (a,b) は、二つのベクトル $(x_1,y_1)\,(x_2,y_2) \neq 0$ が存在して t に関する関数 $g(t) = f(a+tx_1, b+ty_1)$ が $t=0$ で極小、s に関する関数 $h(s) = f(a+sx_2, b+sy_2)$ が $s=0$ で極大となるとき、関数 $f(x,y)$ の峠点という。

例えば、関数 $f(x,y) = x^2 - y^2$ に対する停留点 $(0,0)$ は、$f(x,0) = x^2$ が $x=0$ で極小値、$f(0,y) = -y^2$ が $y=0$ で極大値を持つので、峠点である。