「1類M組　微分積分学第１期末試験想定問題２」

井上淳, 2007.7.04.

以下は2類後藤クラスの中間試験である。5番までが正規の問題で6番はおまけで、できればボーナス点がつくものであった。これを1時間半でどこまで答えられるかな？

$\boxed{1}$ (i) 集合 $E = \{\frac{n+1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$ の上限、下限を定義に基づいて示せ。

(ii) 極限 $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2-n}{n^2+1}$ を求め、$\epsilon - N$ 論法で証明せよ。

$\boxed{2}$ (i) $\alpha = \arctan \frac{1}{3}$ とおくとき $\tan 2\alpha$ を求めよ。

(ii) 等式 $2\arctan \frac{1}{3} + \arctan \frac{1}{7} = \frac{\pi}{4}$ を示せ。

$\boxed{3}$ 次の関数の、原点における連続性及び微分可能性を調べよ。

$$f(x) = \begin{cases} x\sin \dfrac{1}{x} & (x \neq 0), \\ 0 & (x = 0). \end{cases}$$

$\boxed{4}$ 次の極限を求めよ。（ここでは $\epsilon - \delta$ 論法を用いなくて良い）

(i) $\lim_{x\to 0} \frac{e^{x+x^2}-1-x}{x^2}$,

(ii) $\lim_{x\to 0}(\cos x)^{x^{-2}}$.

$\boxed{5}$ $e^{-0.1}$ の値を少数以下第3位まで求め、誤差を与えよ。

$\boxed{6}$ C^∞ 級関数 $f(x)$ に対し、数列 $\{x_k\}$ で $f(x_k) = 0,\ x_k \neq 0$ かつ $x_k \to 0$ なるものが存在するとする。このとき任意の正整数 n に対し $f^{(n)}(0) = 0$ となることを示せ。

＝＝＝＝＝ ここまで後藤問題 ＝＝＝＝＝

後藤問題とは別に $\boxed{6}$ と似た問題で

$\boxed{7}$ 実係数 n 次多項式 $p(x)$ 及びその導関数 $p'(x), p''(x), \cdots, p^{(n)}(x)$ のすべてを正とするような x の値は、方程式 $p(x) = 0$ の正根の上界である事を示せ（実係数方程式が一つの正数 M より大きな正の実数解を持たないとき、M を正根の上界という）。

も考えてみてはどうか？

これらの問題とは別に、教科書の問題を自分で解いて紙に書き下してみよう。2,3日後にもう一度考えればいつの間にか数学的考え方が少しはガテンされるはずです。数学に触れるのはこれが最後と思う人程、一度だけでもこの操作を体験して欲しいものです。そうすれば、東工大1類での数学研究者による数学の講義を受けた意味があると感じられるはずです !?（最後の部分は講義する側の願望でしかないのですが）