「1類M組　微分積分学第1期末試験問題–7月25日」 2007.7.25, 13.20-16.20, 井上淳

● 問題は8題、答案用紙は5枚綴りである。番号順に解答しなくても構わないが、どの問題の解答であるか区切りを明記し、うまく整理して答案を作成して欲しい。万が一紙が不足した場合は、裏を使うことを記し、そこに解答して良い。

● 授業や演習に関する物言い（助言、苦情等）や感想は「授業に対する貢献」と見なされ、ボーダーライン付近の点が増えることがあっても、減ることはない。（できればメールで1週間以内に）。

============= 以下問題 =============

$\boxed{\mathbf{1}}$ 次の方程式を満たすように x を定めよ。

$$\arctan\frac{1}{3}+\arctan\frac{1}{5}+\arctan x=\frac{\pi}{4}.$$

$\boxed{\mathbf{2}}$ f を $[0,1]$ 上の連続関数とする。この時、 $[0,1]$ 内の任意の Cauchy 列 $\{a_n\}$ に対し $\{f(a_n)\}$ は Cauchy 列を為すことを示せ。

$\boxed{\mathbf{3}}$ (i) ϕ を定数とし、$f(x)=e^{x\cos\phi}\cos(x\sin\phi)$ とおく。このとき、$f(x)$ の n 階導関数 $f^{(n)}(x)$ を計算せよ。（帰納法を用いて正確に計算すること。）
(ii) (i) で定めた関数 $f(x)$ の $x=0$ での Taylor の公式（定理）を求め、剰余項 R_n を正確に書け。

$\boxed{\mathbf{4}}$ 次の極限を計算過程とともに与えよ。（この問では $\epsilon-\delta$ 論法を明示的に用いなくてよい）

$$(1)\ \lim_{x\to\infty}x^{1/x},\quad (2)\ \lim_{x\to0}\frac{e^x x\sin x-x\sin x}{x-\sin x},\quad (3)\ \lim_{x\to+0}x^x,\quad (4)\ \lim_{x\to0}\left(\frac{a^x+b^x+c^x}{3}\right)^{3/x}\quad (a,b,c>0).$$

$\boxed{\mathbf{5}}$ 以下で定められる関数が原点 $(0,0)$ において連続であるかどうかを判定し、その証明を与えよ。

$$(i)\ f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2x^2-y^2}{x^2+3y^2} & \text{if } (x,y)\neq(0,0),\\ 0 & \text{if } (x,y)=(0,0).\end{cases}\qquad (ii)\ g(x,y)=\begin{cases}\left(1+\dfrac{2x}{y}\right)\sin\dfrac{1}{3x}\cdot\sin y & \text{if } xy\neq0,\\ 0 & \text{if } xy=0.\end{cases}$$

$\boxed{\mathbf{6}}$ 関数 $\sin(x+2y)$ を $(x,y)=(0,0)$ で第3次まで Taylor 展開し剰余項を求めよ。

$\boxed{\mathbf{7}}$ 極座標変換 $x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta,\ r^2=x^2+y^2\geq0,\ 0\leq\theta\leq2\pi$ を用いて C^2-級関数 $f(x,y)$ を $\tilde{f}(r,\theta)=f(r\cos\theta,r\sin\theta)$ と表示する。

$$\left|\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right|^2+\left|\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right|^2\Bigg|_{x=r\cos\theta,y=r\sin\theta}\qquad \text{及び}\qquad \left(\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2}\right)\Bigg|_{x=r\cos\theta,y=r\sin\theta}$$

を $\tilde{f}$ とその微分 $\dfrac{\partial\tilde{f}}{\partial r},\ \dfrac{\partial\tilde{f}}{\partial\theta},\ \dfrac{\partial^2\tilde{f}}{\partial r^2},\ \dfrac{\partial^2\tilde{f}}{\partial\theta^2},\ \dfrac{\partial^2\tilde{f}}{\partial r\partial\theta}$ 等を用いて表示せよ。

$\boxed{\mathbf{8}}$ 関数 $f(x,y)=xy\mathrm{e}^{-x^2-y^2}$ に対して、以下の問に答えよ。
(1) f の1階および2階の偏導関数を全て求めよ。
(2) f の停留点（(a,b) で $f_x(a,b)=f_y(a,b)=0$ なるもの）を全て求めよ。
(3) f の極値点を全て求め、極大・極小を判定せよ。