「1 類 M 組　微分積分学第１期末試験解答例–講評等」　　井上淳　2007.8.5.

成績について. 以下に成績優秀者（満点 150=30+120）の番号を記して健闘をたたえる：

07-10598, 07-27067, 07-14082 ($x \geq 120$),
07-02363, 07-16980, 07-14892, 07-14870 ($120 > x \geq 115$),

但し、他に 17 名の 100 点以上の者がいたが、約束通り 100 点以上は切り捨てて皆 100 点とした！これは、あえて言えば格差是正政策とでも言え、切り捨てられた点数はその当該者が自らの現世得を仲間の点数引き上げに還元したのであるが、できたという感触はそれ自身将来への記憶として残っているのだから、ソレデイイノダとして欲しい。

上のように水増し採点なので、平均は 80.52 点、総点 49 点以下の 10 名を不合格とした。

尚、採点基準を変え 150 点の 0.8 倍を得点 (120 点を満点と換算しそれ以上は切り捨て) とすると、中間と期末の総点が 72 点未満の 22 名が不合格となり平均は 66.39 点となる。今回はこの基準はとらない。

採点について. メールで $\boxed{4}$(2) の解答例の間違いを多くの人から指摘された。もっともである。あの答案例では f'' の計算を間違っているので 0 点である。また、Taylor 展開を用いたものも載せておいた。$\boxed{7}$の計算の出来は極めて悪かったが、この座標変換は後学期の重積分のみならずベクトル解析、量子力学でも用いられので、3 次元の場合はどうなるかも込めて勉強しておくことを勧める。

答案返却について. 答案は後期微積分第 2 の第 1 回目の講義の終わりに返却し、それ以降は中間試験答案とともに数学事務室に保管し、受験者本人に返却する。

==============

$\boxed{\mathbf{1}}$ 次の方程式を満たすように x を定めよ。

$$\arctan\frac{1}{3} + \arctan\frac{1}{5} + \arctan x = \frac{\pi}{4}.$$

解答例 [10 点]：$\alpha = \arctan\frac{1}{3}$, $\beta = \arctan\frac{1}{5}$, $\gamma = \arctan x$, 即ち、$\tan\alpha = 1/3$, $\tan\beta = 1/5$, $\tan\gamma = x$ とおく。tan の加法公式を用いて

$$\tan(\alpha+\beta+\gamma) = \frac{\tan(\alpha+\beta)+\tan\gamma}{1-\tan(\alpha+\beta)\tan\gamma} = \frac{\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}+\tan\gamma}{1-\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}\tan\gamma} = \tan\pi/4 = 1$$

となる。条件の数値を代入して

$$\tan(\alpha+\beta+\gamma) = \frac{\frac{4}{7}+x}{1-\frac{4}{7}x} = \frac{4+7x}{7-4x} = 1 \Longrightarrow x = \frac{3}{11}. \qquad \square$$

別解：$\arctan\frac{1}{3} + \arctan\frac{1}{5} = \frac{\pi}{4} - \arctan x$ として両辺の tan をとり、加法公式から

$$\frac{\frac{1}{3}+\frac{1}{5}}{1-\frac{1}{15}} = \frac{1-x}{1+x} \Longrightarrow x = \frac{3}{11}$$

という解答も散見された。この方がスマートである。

参考：ここで Euler の公式 $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$ を用いて tan の加法公式の導き方を思い出しておこう。

$$\begin{aligned}e^{i(\theta+\phi)}&=\cos(\theta+\phi)+i\sin(\theta+\phi)\\&=(\cos\theta+i\sin\theta)(\cos\phi+i\sin\phi)\\&=\cos\theta\cos\phi-\sin\theta\sin\phi+i(\cos\theta\sin\phi+\sin\theta\cos\phi),\end{aligned}$$

これより tan の加法公式が従う：

$$\tan(\theta+\phi)=\frac{\sin(\theta+\phi)}{\cos(\theta+\phi)}=\frac{\cos\theta\sin\phi+\sin\theta\cos\phi}{\cos\theta\cos\phi-\sin\theta\sin\phi}=\frac{\tan\phi+\tan\theta}{1-\tan\theta\tan\phi}.$$

ここで上式最後の等号は、分子分母を $\cos\theta\cos\phi$ で割ったものである。

$\boxed{\mathbf{2}}$ f を $[0,1]$ 上の連続関数とする。この時、 $[0,1]$ 内の任意の Cauchy 列 $\{a_n\}$ に対し $\{f(a_n)\}$ は Cauchy 列を為すことを示せ。

解答例 [10 点]：$\{a_n\}$ を $[0,1]$ 内の Cauchy 列とすると、$\{a_n\}$ は $[0,1]$ 内の点 α に収束する。一方、f は $[0,1]$ 上の連続関数だから $f(a_n)$ は $f(\alpha)$ に収束する。故に $\{f(a_n)\}$ は Cauchy 列をなす。 $\square$

疑問：『「f は $[0,1]$ 上で（一様）連続だから、任意の $\epsilon>0$ に対して $\delta>0$ があって $|x-a|<\delta$ なる限り $|f(x)-f(a)|<\epsilon$ となる。」一方、$\{a_m\}$ は Cauchy 列だから、任意の $\epsilon_1>0$ に対し n_0 があって $m,n\geq n_0$ なるとき $|a_m-a_n|<\epsilon_1$ となる。故に $a=a_m$、$x=a_n$ とし $\epsilon_1=\delta$ ととれば $|f(a_n)-f(a_m)|<\epsilon$ となる』という答案は 現時点での講義からの知識だけだと少しまずい と言われかねない。

どこがどうまずいのだろうか？『$\cdots$』の「$\cdots$」の部分で（一様）がなければ減点 4、一様と書いてあれば減点 2 とした。この講義録の最後に述べた付録を参照して欲しい！「一様連続と連続の差」を講義していないからで、本来ならば一様と書いてあれば満点である。これについて異議がある、即ち私は「一様連続と書いたし、それの定義も証明も分かっている」と採点修正を求める人の要求は受け入れる予定である。

$\boxed{\mathbf{3}}$ (i) ϕ を定数とし、$f(x)=\mathrm{e}^{x\cos\phi}\cos(x\sin\phi)$ とおく。このとき、$f(x)$ の n 階導関数 $f^{(n)}(x)$ を計算せよ。（帰納法を用いて正確に計算すること。）
(ii) (i) で定めた関数 $f(x)$ の $x=0$ での Taylor の公式（定理）を求め、剰余項 R_n を正確に書け。

(i) 解答例 [8 点]：

$$f'(x)=(\cos\phi\cos(x\sin\phi)-\sin\phi\sin(x\sin\phi))e^{x\cos\phi}=\cos(x\sin\phi+\phi)e^{x\cos\phi},$$

$$f''(x)=(-\sin\phi\sin(x\sin\phi+\phi)+\cos\phi\cos(x\sin\phi+\phi))e^{x\cos\phi}=\cos(x\sin\phi+2\phi)e^{x\cos\phi}$$

より

$$f^{(n)}(x)=\cos(x\sin\phi+n\phi)e^{x\cos\phi}$$

と想定できる。$n=1$ では成立、n まで成立しているとすると仮定すると

$$\begin{aligned}f^{(n+1)}(x)&=(\cos(x\sin\phi+n\phi)e^{x\cos\phi})'=[-\sin\phi\sin(x\sin\phi+n\phi)+\cos\phi\cos(x\sin\phi+n\phi)]e^{x\cos\phi}\\&=\cos(x\sin\phi+(n+1)\phi)e^{x\cos\phi}.\qquad\square\end{aligned}$$

間違った答案の典型例：$a=\cos\theta,\ b=\sin\theta,\ f(x)=\cos(bx)e^{ax}$ とおく。

$$\frac{d^k}{dx^k}e^{ax}=a^ke^{ax},\quad \frac{d^j}{dx^j}\cos(bx)=b^j\cos\left(bx+\frac{j\pi}{2}\right)$$

となることは、$-\sin(\alpha)=\cos(\alpha+\frac{\pi}{2})$ を用い、帰納法を用いて容易に示せる。Leibnitz の公式を用いて

$$f^{(n)}(x)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}b^k\cos\left(bx+\frac{k\pi}{2}\right)\cdot a^{n-k}e^{ax},$$

とすると、先が見えない旅に出てしまうようだ。これは、Leibniz の公式を覚えていたことに対して 2 点程度を与えた。

(ii) 解答例 [2 点]：$f^{(n)}(0) = \cos(n\phi)$ だから

$$f(x) = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\cos(j\phi)}{j!} x^j + \frac{\cos(\theta x \sin\phi + n\phi) e^{\theta x \cos\phi}}{n!} x^n, \qquad \exists\theta \in (0,1). \qquad \square$$

$\boxed{\mathbf{4}}$ 次の極限を計算過程とともに与えよ。（この問では $\epsilon - \delta$ 論法を明示的に用いなくてよい）

$$(1)\ \lim_{x\to\infty} x^{1/x}, \quad (2)\ \lim_{x\to 0} \frac{e^x x \sin x - x \sin x}{x - \sin x}, \quad (3)\ \lim_{x\to +0} x^x, \quad (4)\ \lim_{x\to 0} \left(\frac{a^x + b^x + c^x}{3}\right)^{3/x} \quad (a,b,c > 0),$$

解答例：以下では、例えば、l'Hospital の法則から示される、$\lim_{x\to+0} x^a \log x = 0\ (a > 0)$ なることを度々使う。また、g が $x = a$ で連続のとき、$\lim_{x\to a} g(x)$ の代わりに単に $g(a)$ と記す。

(1) [5 点] $1/x = y$ とおくと $x^{1/x}$ は $\left(\frac{1}{y}\right)^y$ となる。対数をとって

$$\log\left(\frac{1}{y}\right)^y = -y \log y \to 0\ (y \to +0), \quad 故に \quad \lim_{x\to\infty} x^{1/x} = 1.$$

(2) [5 点] $f(x) = (e^x - 1)x \sin x$、$g(x) = x - \sin x$ とおくと、原点で連続で $f(0) = g(0) = 0$ なので l'Hospital の法則の条件を確かめられた。同様に $f'(x) = e^x x \sin x + (e^x - 1)(\sin x + x \cos x)$ かつ $g'(x) = 1 - \cos x$ であり $f'(0) = g'(0) = 0$ で条件を満たす。もう一度微分して $f''(x) = 2e^x(x \sin x + x \cos x + \sin x) - (2\cos x - x \sin x)$ かつ $g''(x) = \sin x$ だから $f''(0) = g''(0) = 0$ で条件を満たす。もう一度微分して $f'''(x) = e^x\big(2x(\cos x -) + 3\sin x + 6\cos x\big) + 2(3\sin x + x\cos x)$ かつ $g'''(x) = \cos x$ となり $f'''(0) = 6, g''(0) = 1$ となるから l'Hospital の法則を使え、$\lim_{x\to 0} \frac{e^x x \sin x - x \sin x}{x - \sin x} = 6$.

(2) の別解：Taylor の定理を用いて $x \to 0$ のとき $e^x = 1 + x + 0(x^2)$ $sinx = x - \frac{1}{3!}x^3 + 0(x^4)$ となる。故に

$$f(x) = (e^x - 1)x \sin x = (x + 0(x^2))x(x - \frac{1}{3!}x^3 + 0(x^4)) = x^3(1 + O(x^4)),$$
$$g(x) = x - \sin x = \frac{1}{3!}x^3 + 0(x^4) = x^3(\frac{1}{3!} + 0(x))$$

として直ちに求める結果が得られる。

(3) [5 点] $f(x) = x^x$ とおくと $\log f(x) = x \log x \to 0\ (x \to +0)$。故に $\lim_{x\to+0} x^x = 1$.

(4) [5 点] 対数をとって

$$\log\left(\frac{a^x + b^x + c^x}{3}\right)^{3/x} = \frac{3(\log(a^x + b^x + c^x) - \log 3)}{x}.$$

$f(x) = 3(\log(a^x + b^x + c^x) - \log 3)$、$g(x) = x$ とおくと $f(0) = g(0) = 0$、故に

$$f'(x) = 3\frac{a^x \log a + b^x \log b + c^x \log c}{a^x + b^x + c^x}, \quad f'(0) = \log(abc) \quad かつ \quad g'(0) = 1$$

だから l'Hospital の法則より

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{a^x + b^x + c^x}{3}\right)^{3/x} = abc. \qquad \square$$

$\boxed{5}$ 以下で定められる関数が原点 $(0,0)$ において連続であるかどうかを判定し、その証明を与えよ。

$$(i)\ f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2x^2-y^2}{x^2+3y^2} & \text{if } (x,y)\neq(0,0),\\ 0 & \text{if } (x,y)=(0,0).\end{cases}\qquad (ii)\ g(x,y)=\begin{cases}\left(1+\dfrac{2x}{y}\right)\sin\dfrac{1}{3x}\ \sin y & \text{if } xy\neq 0,\\ 0 & \text{if } xy=0.\end{cases}$$

解答例 (i)[10 点]：原点 $(0,0)$ において連続ではない。実際、点 (x,y) が直線 $y=mx$ 上で原点 $(0,0)$ に近づくとき、

$$m^2=2\ \text{以外の時は}\quad \frac{2x^2-y^2}{x^2+3y^2}=\frac{2-m^2}{1+3m^2}\not\to 0=f(0,0).\qquad\square$$

解答例 (ii)[10 点]:原点 $(0,0)$ において連続である。実際、任意の $\epsilon>0$ に対し $\delta>0$ があって、$\sqrt{x^2+y^2}\leq\delta$ なるとき

$$\left|\frac{\sin y}{y}-1\right|\leq\epsilon,\quad |\sin y|\leq\epsilon,\quad \left|x\sin\frac{1}{x}\right|\leq\epsilon$$

である。故に、任意の $\epsilon>0$ に対し $\delta>0$ があって、$\sqrt{x^2+y^2}\leq\delta$ なるとき

$$\left|\left(1+\frac{2x}{y}\right)\sin\frac{1}{3x}\ \sin y-0\right|\leq 3\epsilon+2\epsilon^2.\qquad\square$$

注意：勿論、以下のような評価を用いてもよい。

$$\left|\left(1+\frac{2x}{y}\right)\sin\frac{1}{3x}\ \sin y\right|=|y+2x|\left|\sin\frac{1}{3x}\right|\left|\frac{\sin y}{y}\right|\leq\sqrt{5}\sqrt{x^2+y^2}\sup_{0\leq y\leq 1}\left|\frac{\sin y}{y}\right|.$$

$\boxed{6}$ 関数 $\sin(x+2y)$ を $(x,y)=(0,0)$ で第３次まで Taylor 展開し剰余項を求めよ。

解答例 [10 点]：$g(t)=\sin(tx+2ty)$ とおいて t に関し Taylor 展開する：

$$g(1)=g(0)+g'(0)+\frac{1}{2!}g''(0)+\frac{1}{3!}g'''(0)+\frac{1}{4!}g^{(4)}(\theta),\quad o<\exists\theta<1.$$

ここで

$$g'(t)=(x+2y)\cos(tx+2ty),\quad g''(t)=-(x+2y)^2\sin(tx+2ty),$$
$$g'''(t)=-(x+2y)^3\cos(tx+2ty),\quad g^{(4)}(t)=(x+2y)^4\sin(tx+2ty),$$

だから

$$g(0)=0,\quad g'(0)=x+2y,\quad g''(0)=0,\quad g'''(0)=-(x+2y)^3,\quad g^{(4)}(t)=(x+2y)^4\sin(tx+2ty)$$

となる。故に

$$\sin(x+2y)=x+2y-\frac{1}{3!}(x+2y)^3+R_4,\quad R_4=\frac{1}{4!}(x+2y)^4\sin(\theta x+2\theta y).\qquad\square$$

注意:『第３次まで Taylor 展開し剰余項を求めよ』という質問があったが、各自考えるようにしておいた。

$\boxed{7}$ 極座標変換 $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$, $r^2=x^2+y^2\geq 0$, $0\leq\theta\leq 2\pi$ を用いて C^2-級関数 $f(x,y)$ を $\tilde{f}(r,\theta)=f(r\cos\theta,r\sin\theta)$ と表示する。

$$\left|\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right|^2+\left|\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right|^2\Bigg|_{\substack{x=r\cos\theta,\\ y=r\sin\theta}}\quad\text{及び}\quad\left(\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2}\right)\Bigg|_{\substack{x=r\cos\theta,\\ y=r\sin\theta}}$$

を $\tilde{f}$ とその微分 $\dfrac{\partial\tilde{f}}{\partial r}$, $\dfrac{\partial\tilde{f}}{\partial\theta}$, $\dfrac{\partial^2\tilde{f}}{\partial r^2}$, $\dfrac{\partial^2\tilde{f}}{\partial\theta^2}$, $\dfrac{\partial^2\tilde{f}}{\partial r\partial\theta}$ 等を用いて表示せよ。

解答例 [20 点]：$\tilde{f}(r,\theta)=f(r\cos\theta, r\sin\theta)$ を微分して

$$\begin{cases}\tilde{f}_r=\cos\theta f_x+\sin\theta f_y,\\ \tilde{f}_\theta=-r\sin\theta f_x+r\cos\theta f_y\end{cases}\iff\begin{pmatrix}\tilde{f}_r\\ \tilde{f}_\theta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -r\sin\theta & r\cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}f_x\\ f_y\end{pmatrix}\qquad(*)$$

を得る。上式で f_x は $f_x(x,y)\Big|_{\substack{x=r\cos\theta,\\ y=r\sin\theta}}$、$f_y$ は $f_y(x,y)\Big|_{\substack{x=r\cos\theta,\\ y=r\sin\theta}}$ の意味である。これより簡単に

$$|r\tilde{f}_r|^2+|\tilde{f}_\theta|^2=r^2(|f_x|^2+|f_y|^2),$$

即ち、

$$\left(\left|\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right|^2+\left|\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right|^2\right)\Bigg|_{\substack{x=r\cos\theta,\\ y=r\sin\theta}}=\left|\frac{\partial\tilde{f}(r,\theta)}{\partial r}\right|^2+\frac{1}{r^2}\left|\frac{\partial\tilde{f}(r,\theta)}{\partial\theta}\right|^2.$$

同様に

$$\begin{cases}\tilde{f}_{rr}=\cos^2\theta f_{xx}+\sin^2\theta f_{yy}+\sin\theta\cos\theta(f_{xy}+f_{yx}),\\ \tilde{f}_{\theta\theta}=-r\cos\theta f_x-r\sin\theta(-f_{xx}r\sin\theta+f_{yx}r\cos\theta)-r\sin\theta f_y+r\cos\theta(-f_{xy}r\sin\theta+f_{yy}r\cos\theta)\end{cases}$$

これらより、簡単に

$$\tilde{f}_{rr}+\frac{1}{r}\tilde{f}_r+\frac{1}{r^2}\tilde{f}_{\theta\theta}=(f_{xx}+f_{yy})\Big|_{\substack{x=r\cos\theta,\\ y=r\sin\theta}}.\qquad\square$$

注意：上の式の右辺を、変数について言及せずに、単に $f_{xx}+f_{yy}$ と書く事が多い。

注意：以下のような計算をする人もいたが、ごく少数の例外を除いて、大抵途中で間違ってしまっていた。

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}=\frac{\partial\tilde{f}(r,\theta)}{\partial r}\cdot\frac{\partial\sqrt{x^2+y^2}}{\partial x}+\frac{\partial\tilde{f}(r,\theta)}{\partial\theta}\cdot\frac{\partial\arctan y/x}{\partial x}=\cdots$$

(*) より

$$\begin{pmatrix}f_x\\ f_y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -r\sin\theta & r\cos\theta\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}\tilde{f}_r\\ \tilde{f}_\theta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\theta & -r^{-1}\sin\theta\\ \sin\theta & r^{-1}\cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\tilde{f}_r\\ \tilde{f}_\theta\end{pmatrix}$$

なる関係式（の導き方）も覚えておくと良い。

$\boxed{8}$ 関数 $f(x,y)=xye^{-x^2-y^2}$ に対して、以下の問に答えよ。

(1) f の１階および２階の偏導関数を全て求めよ。

(2) f の停留点を全て求めよ。

(3) f の極値点を全て求め、極大・極小を判定せよ。

解答例 (1)[5 点]：１階偏導関数は $f_x=(y-2x^2y)e^{-x^2-y^2}$, $f_y=(x-2xy^2)e^{-x^2-y^2}$ となる。

$$f_{xx}=(-4xy-2x(y-2x^2y))e^{-x^2-y^2}=-2xy(3-2x^2)e^{-x^2-y^2},$$
$$f_{yx}=(1-2y^2)(1-2x^2)e^{-x^2-y^2}=f_{xy},\quad f_{yy}=-2xy(3-2y^2)e^{-x^2-y^2}.\qquad\square$$

解答例 (2)[5 点]：$f_x=0$, $f_y=0$ より

$$y(1-2x^2)=0, x(1-2y^2)=0$$

を満たす点が停留点であり、

$$(0,0),\ (\frac{1}{\sqrt{2}},\ \frac{1}{\sqrt{2}}),\ (\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}),\ (-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}),\ (-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}),$$

である。　□

解答例 (3)[10 点]：点 (a,b) でのヘッセ行列は

$$H_f(a,b) = \begin{pmatrix} f_{xx}(a,b) & f_{xy}(a,b) \\ f_{yx}(a,b) & f_{yy}(a,b) \end{pmatrix}, \quad D_f(a,b) = f_{xy}(a,b)f_{yx}(a,b) - f_{xx}(a,b)f_{yy}(a,b)$$

であり、

$$f_{xx}(a,b) > 0, \quad D_f(a,b) < 0 \Longrightarrow (a,b) \text{ は極小値},$$
$$f_{xx}(a,b) < 0, \quad D_f(a,b) < 0 \Longrightarrow (a,b) \text{ は極大値},$$

となる。

$$f_{xx}(0,0) = 0 = f_{yy}(0,0), \quad f_{xy}(0,0) = 1, \quad D_f(0,0) = 1, \quad (0,0) \text{ は極値点ではない},$$
$$f_{xx}(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}) = -\frac{3}{2e} < 0,\ D_f(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}) = -\frac{9}{4e^2} < 0,\ (\pm\tfrac{1}{\sqrt{2}}, \pm\tfrac{1}{\sqrt{2}}) \text{ で極大値（複号同順）をとる},$$
$$f_{xx}(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \mp\frac{1}{\sqrt{2}}) = \frac{3}{2e} > 0,\ D_f(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \mp\frac{1}{\sqrt{2}}) = -\frac{9}{4e^2} < 0,\ (\pm\tfrac{1}{\sqrt{2}}, \mp\tfrac{1}{\sqrt{2}}) \text{ で極小値（複号同順）をとる}. \quad \square$$

———— 付録：各点連続と一様連続の差 ————

$\boxed{\mathbf{2}}$ の疑問に答えるためには少々準備がいる。ことのついでに、論理記号も学んでみよう。

$$f \text{ が } U \text{ 上で連続である} \Longleftrightarrow (\forall x \in U)(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall y \in U)(|x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon).$$

上の書き順からも分かるように、δ は、与えられた x と ϵ に依る！これの否定は次のようになる。

$$\begin{aligned} f \text{ は } U \text{ 上で連続ではない} \Longleftrightarrow & (\exists x \in U)(\exists \epsilon > 0)(\forall \delta > 0)(\exists y \in U)(|x-y| < \delta \text{ かつ } |f(x) - f(y)| \geq \epsilon) \\ \Longleftrightarrow & \text{ある } x \in U \text{ 及びある } \epsilon > 0 \text{ に対して、どんな } \delta > 0 \text{ をとっても、} \\ & |x-y| < \delta \text{ を満たす } y \in U \text{ で } |f(x) - f(y)| \geq \epsilon \text{ となるものがある}. \end{aligned}$$

新しい概念として、一様連続というものがある。以下にその定義を与えるが、連続性とどこがどう違うか比較して欲しい：

$$f \text{ が } U \text{ 上で一様連続である} \Longleftrightarrow (\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in U)(\forall y \in U)(|x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon).$$
$$\begin{aligned} f \text{ は } U \text{ 上で一様連続ではない} \Longleftrightarrow & (\exists \epsilon > 0)(\forall \delta > 0)(\exists x \in U)(\exists y \in U)(|x-y| < \delta \text{ かつ } |f(x) - f(y)| \geq \epsilon) \\ \Longleftrightarrow & \text{ある } \epsilon > 0 \text{ に対して、どんな } \delta > 0 \text{ をとっても、} \\ & |x-y| < \delta \text{ を満たす } x, y \in U \text{ で } |f(x) - f(y)| \geq \epsilon \text{ となるものがある}. \end{aligned}$$

定理 0.1 有界閉集合上で連続な関数はその有界閉集合上で一様連続である。

この定理は後学期の積分の定義のときに使われる。証明はその時に与えるが、諸君自ら定理の証明を試みて欲しい（背理法を用い、Bolzano-Weierstrass の補題を使うとよい)。

さて、この定理を用いれば、関数 f が $I = [0,1]$ で連続ならば一様連続、だから、任意の $\epsilon > 0$ に対しある $\delta > 0$ があって $x, y \in I$、$|x-y| < \delta$ ならば $|f(x) - f(y)| < \epsilon$ となる。一方、$\{a_m\}$ は Cauchy 列だから、この $\delta > 0$ に対し n_1 があって $m, n \geq n_1$ なるとき $|a_m - a_n| < \delta$ となる。故に、任意の $\epsilon > 0$ に対し n_1 があって $m, n \geq n_1$ なるとき、$x = a_m$、$y = a_n$ とおくと $|f(a_m) - f(a_n)| < \epsilon$ となる。即ち、$\{f(a_m)\}$ は Cauchy 列となる。

これで、上に述べた記述「$\cdots$」で何が少しまずいのか分かって貰えただろうか？先に述べた解答で「各点で連続」ではなく「区間 $[0,1]$ で一様連続」と明記 (+証明) されていないことが減点対象になるのである。

[注意] f が $(0,1]$ 上の連続関数の場合、(b) の主張は成立しないことが、次の例で示される。

$(0,1]$ 上の連続関数 $f(x) = 1/x$ に対し、 $a_n = 1/n$ ととれ。$\{a_n\}$ は Cauchy 列をなすが $f(a_n) = n$ は $n \to \infty$ の時発散する。