

微分積分学第一 1類M組 第13回講義内容 (2007年7月19日) 井上淳

今日の目標：

- (1) 今学期の復習、
- (2) 中間試験答案返却、

中間試験解答例の中で以下の問題を出しておいた：

問題 $f(x)$ は C^1 -級関数とする。任意の x, y に対し $f(x+y) = f(x)f(y)$ を満たすならば、ある定数 c があって $f(x) = e^{cx}$ となることを示せ。(この主張を正確に証明する為には、常微分方程式の解の一意性を用いる必要があるが、こうなるらしいことは分かるであろう)

解答例： $f(x)$ は C^1 -級関数だから、 $f(x+y) = f(x)f(y)$ の両辺を y で微分し $y=0$ とおくことができる。すると

$$f'(x) = f(x)f'(0) \implies f(x) = \begin{cases} e^{cx} & (c = f'(0) \neq 0), \\ k & (f'(0) = 0) \end{cases}$$

この解の候補を条件式に代入して、 $k = k^2$ より $k = 0$ 或は $k = 1$ となる。□

注意：「常微分方程式の解の一意性」云々は、 $f'(x) = cf(x)$ は常微分方程式の一つで、常微分方程式の解の存在とか、一意性は来学期に「不定積分」の項で少しは説明するつもりである。

上の問題では C^1 -級を仮定したが、実は以下が成立する。

問題 1 \mathbb{R} 上の連続関数 $g(x)$ が、任意の x, y に対し $g(x+y) = g(x) + g(y)$ を満たすならば、それは $g(x) = cx$ の形でなければならないことを示せ。

問題 2 \mathbb{R} 上の連続関数 $f(x)$ が、任意の x, y に対し $f(x+y) = f(x)f(y)$ を満たすならば、 $f(x)$ はどんな形の関数でなければならないか？

略解： $g(x) = \log |f(x)|$ とおけば $g(x+y) = g(x) + g(y)$ を満たす。故に**問題 1**より e^{cx} となる。

問題：これが「とある演習書」にあった「ヒントと答」だが、コレデ正シイ議論ナノカ？隙があるとしたらそれはどこか、どう修正したら良いか考えよ。

問題 3 任意の $x \in \mathbb{R}$ に対し $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$ が定義されることを示し、 $f(x+y) = f(x)f(y)$ なることを示せ。

注意：講義で Taylor 展開について補足をしたが、そこで少し詰まった所を説明し直したので、見ておいて欲しい。

(I) 何故、 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$ といえるのだろうか？

1 実数とは何か

2 関数とは何か (連続関数とその性質)

(II) e は有理数ではない！ Taylor の定理の威力

3 微分可能性と幾つかの性質

4 Taylor の定理

(III) 多変数関数の極大点や極小点はどこにあるのか？

5 多変数関数

5.1 多変数の連続関数

5.2 偏微分と全微分

5.3 合成関数の微分

媒介変数による微分： $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ において、 $\varphi(t)$ は狭義単調増加とすると、 y は x の関数と考えられる。このとき、 $\varphi(t)$, $\psi(t)$ が微分可能で、 $\varphi'(t) \neq 0$ ならば、 y は x の関数として微分可能で

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt}.$$

この主張の証明から始めよう。仮定 $\varphi(t)$ は狭義単調増加から $t = \varphi^{-1}(x)$ と表現できる。これを代入して $y = \psi(\varphi^{-1}(x))$ となるから、これを x の関数として微分する。これは合成関数の微分公式から

$$\frac{dy}{dx} = \psi'(\varphi^{-1}(x)) \frac{d\varphi^{-1}(x)}{dx}.$$

一方、逆関数の微分公式は $x = \varphi(\varphi^{-1}(x))$ より

$$1 = \varphi'(\varphi^{-1}(x)) \frac{d\varphi^{-1}(x)}{dx}, \quad \frac{d\varphi^{-1}(x)}{dx} = \frac{1}{\varphi'(\varphi^{-1}(x))} = \frac{1}{dx/dt} \Big|_{t=\varphi^{-1}(x)}$$

となる。これらより、

$$\frac{dy}{dx} = \psi'(\varphi^{-1}(x)) \frac{1}{\varphi'(\varphi^{-1}(x))} = \frac{dy/dt}{dx/dt} \Big|_{t=\varphi^{-1}(x)}.$$

標語的に

$$(*) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt}$$

これはあたかも dt を数のごとくみなして、左辺の分母分子を dt で割ったように見える。これが多変数の合成関数の微分でしばしば誤解を招くことがあるので、見えても、そうは見ない方が安全! である。更に、

$$\begin{aligned} \frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{d}{dx} \left(\frac{\psi'(\varphi^{-1}(x))}{\varphi'(\varphi^{-1}(x))} \right) \\ &= \frac{\psi''(\varphi^{-1}(x))(d/dx)\varphi^{-1}(x)\varphi'(\varphi^{-1}(x)) - \psi'(\varphi^{-1}(x))\varphi''(\varphi^{-1}(x))(d/dx)\varphi^{-1}(x)}{(\varphi'(\varphi^{-1}(x)))^2} \\ &= \frac{\psi''\varphi' - \psi'\varphi''}{\varphi'^3} \Bigg|_{t=\varphi^{-1}(x)}. \end{aligned}$$

多変数の場合の合成関数の微分 (連鎖公式):

$h(x, y)$ は全微分可能で、 $x = x(t)$ 、 $y = y(t)$ が t について微分可能であるとき、合成関数 $g(t) = h(x(t), y(t))$ は t について微分可能で次式が成立する。

$$\frac{dg(t)}{dt} = h_x(x(t), y(t))\dot{x}(t) + h_y(x(t), y(t))\dot{y}(t), \quad \dot{x}(t) = \frac{dx(t)}{dt}, \quad \dot{y}(t) = \frac{dy(t)}{dt}. \quad (1)$$

5.4 高階偏微分、 C^k -級関数

関数 f が x -方向に偏微分可能であり、更に f_x が x -, y -方向に偏微分可能のとき

$$f_{xx} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial x} = \partial_x \partial_x f = \partial_x^2 f, \quad f_{yx} = \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial x} = \partial_y \partial_x f$$

と表示する。同様に、 f_y に対し

$$f_{xy} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y} = \partial_x \partial_y f, \quad f_{yy} = \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial y} = \partial_y \partial_y f = \partial_y^2 f$$

と表示する。

ところで、

$$\partial_x(\partial_y f) = f_{xy} \quad \text{と書くか} \quad f_{yx} \quad \text{と書くか?}$$

ここでは、 $f_{xy} = (f_y)_x$ をとることにするが、 $f_{yx} = (f_x)_y$ とする人もいる。以下に述べる理由により、この講義ではどちらを用いても良い場合を主として考えるので、それほど気にしなくて良い。 f_{xy} の意味を、 y で偏微分してから x で偏微分するのか、或いは、 x で偏微分してから y で偏微分するのか、と決めておくことは必要。

一般には高階偏微分はその偏微分の順序による!

$$f(x, y) = \begin{cases} xy(x^2 - y^2)/(x^2 + y^2), & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0), \end{cases} \implies f_{xy}(0, 0) \neq f_{yx}(0, 0).$$

実際、 $y \neq 0$ に対し

$$f_x(0, y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, y) - f(0, y)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{y(h^2 - y^2)}{h^2 + y^2} = -y,$$

だから

$$f_{yx}(0, 0) = \frac{d}{dy} f_x(0, y) \Bigg|_{y=0} = -1.$$

同様に $x \neq 0$ に対し

$$f_y(x, 0) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(x, k) - f(x, 0)}{k} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{x(x^2 - k^2)}{x^2 + k^2} = x,$$

だから

$$f_{xy}(0, 0) = \frac{d}{dx} f_y(x, 0) \Bigg|_{x=0} = 1.$$

ところで次の定理が成立することを注意しておく。

定理 5.1 (Schwarz) 点 (a, b) の近くで f_x, f_y, f_{xy} が存在して、 f_{yx} が (a, b) で連続ならば、 $f_{xy}(a, b)$ も存在して、 (a, b) で $f_{xy} = f_{yx}$ 。

以下では、 $f_{xy} = f_{yx}$ となるような関数達を考える方が都合が良い。そこで、次のような定義を導入する：

定義 5.1 $f(x, y)$ が C^2 -級であるとは、2 回偏微分可能であり、全ての 2 階偏導関数

$$f_{xx}(x, y), f_{xy}(x, y), f_{yx}(x, y), f_{yy}(x, y)$$

が連続になることである。

より一般に C^k -級関数とは

$$\frac{\partial^{\ell+m} f}{\partial x^\ell \partial y^m} \quad (\ell + m \leq k)$$

が存在し、 x, y に関し連続なるものとして定義する。

5.5 多変数の Taylor の定理と極大、極小

Taylor の定理 (1 変数の場合) :

定理 5.2 I を \mathbb{R} の開区間とし $f \in C^k(I)$ とすると、 $a \in I, x \in I$ に対して

$$f(x) = \sum_{j=0}^{k-1} \frac{1}{j!} f^{(j)}(a)(x-a)^j + R_k, \quad R_k = \frac{1}{k!} f^{(j)}(a + \theta(x-a))(x-a)^k, \quad (\exists \theta \in (0, 1)).$$

この定理の証明は補助関数 g を

$$g(x) = \sum_{j=0}^{k-1} f^{(j)}(x) \frac{(b-x)^j}{j!} + A(b-x)^k$$

とし $g(a) = g(b)$ となるように A を定め、Rolle の定理を用いれば良かった。

これを用いて、関数の極大・極小を計算したことを思い出そう。

定義 5.2 $f \in C(I)$ が $x = c$ で極大になっているとは、ある $\delta > 0$ があって $(c - \delta, c + \delta) \subset I$ であり、

$$f(x) \leq f(c), \quad \forall x \in (c - \delta, c + \delta)$$

となることである。このとき、 $f(c)$ を極大値という。

注意：より詳しく、広義或は狭義の極大とか、極小とかいう概念について、その名前の付け方から定義を類推せよ。また、点 $x = c$ が区間 I の境界にある場合は、どう定義したら良いか、各自考えよ。

命題 5.1 区間 I で定義された関数 $f \in C^2(I)$ が、区間内の点 c で

$$f'(c) = 0, \quad f''(c) < 0$$

となるならば、関数 f は $x = c$ で極大値をとる。

Taylor 展開について: C^∞ 関数 f に対し、任意の n を与えると

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + R_n, \quad R_n = \frac{f^{(n)}(a + \theta(x-a))}{n!} (x-a)^n$$

となる。もし $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = 0$ が成り立つとき関数 f は Taylor 展開可能といい、

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k$$

と表示した。(x は任意でよいのかとか、一々区別するのが面倒になったのでこんな書き方をしている。6月28日の講義録を見直して欲しい。)

こうなるような関数の例として

$$f(x) = e^x, \quad f^{(k)}(x) = e^x, \quad R_n = \frac{e^{a+\theta(x-a)}}{n!} (x-a)^n$$

を考える。このとき

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = 0$$

をどう示すか。 $2 < e < 3$ だから n に依らない定数 $C = 3^{a+\theta(x-a)}$ を用いて

$$|R_n| \leq C \frac{|x-a|^n}{n!}$$

となる。右辺が $n \rightarrow \infty$ のときどうなるのかを調べるのだが、ポイントを見易くする為に任意の $a > 0$ に対して

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n!} = 0$$

を示そう。そのために、前に説明したはずだが、

『 $b_n > 0$ とするとき極限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_{n+1}}{b_n} = r$ が存在して $0 \leq r < 1$ となるとする。このとき $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$ 』を示す。そもそも講義中にこのことを失念して妙なことを口走った!

実際 $r < \tilde{r} < 1$ となる \tilde{r} をとり、 $\epsilon = \tilde{r} - r$ とみなすと、ある N があって任意の $n \geq N$ に対し

$$\left| \frac{b_{n+1}}{b_n} - r \right| \leq \tilde{r} - r, \quad \frac{b_{n+1}}{b_n} \leq \tilde{r}$$

となる。故に

$$b_{n+1} \leq \tilde{r} b_n \leq \tilde{r}^2 b_{n-1} \leq \tilde{r}^{n-N+1} b_N$$

だから、 $n \rightarrow \infty$ とすれば右辺は 0 に収束する。

そこで $b_n = \frac{a^n}{n!}$ とおくと

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{a}{n+1} \rightarrow 0 = r \quad (n \rightarrow \infty)$$

となるから、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n!} = 0$ が示された。

注意: 講義中にも注意したように、この剰余項 R_n の評価には Lagrange の剰余だけでなく Cauchy の剰余という別の表現が必要になることもある。

注意: 関数が C^∞ であっても、必ずしも Taylor 展開可能ではない。例として

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & (x \neq 0), \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$$

を考える。すると任意の n に対して $f^{(n)}(0) = 0$ が分かるから、もし Taylor 展開可能だとすると

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} f^{(k)}(0)x^k + R_n = R_n \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

即ち、任意の $x > 0$ に対して $f(x) = 0$ となってしまう (コレララシメセ!)。これは恒等的に 0 ではない f の定義と矛盾しているから $x > 0$ で $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = 0$ とはならない。

2 変数の Taylor の定理

その前に、「1 変数関数が有界閉区間で連続ならば最大値、最小値が存在する」の多次元版がどうなるか? ここで 1 変数の有界閉区間の典型例は $[a, b]$ であったが、2 変数の場合は矩形 (長方形) $[a, b] \times [c, d]$ が典型例である。問題は、「関数 $f(x, y)$ が $[a, b] \times [c, d]$ で連続ならば最大値、最小値が存在する」をどう示すかである。1 変数の場合に証明を復習し、多次元版は宿題としておいた。

さて、2 変数の Taylor の定理はどうなるだろうか? 講義では次のように考えた: $f(x, y)$ の (a, b) での挙動を、関数

$$g(t) = f(a + t(x - a), b + t(y - b)), \quad g(0) = f(a, b), \quad g(1) = f(x, y)$$

を用いて調べる。 $g(t)$ は 1 変数関数だから、それに Taylor の定理を用いて 2 回微分まで考えると

$$g(t) = g(0) + \dot{g}(0)t + \frac{\ddot{g}(\theta t)}{2!}t^2 \quad 0 < \exists \theta < 1.$$

となる。故に、

$$g(1) - g(0) = f(x, y) - f(a, b) = \dot{g}(0) + \frac{\ddot{g}(\theta)}{2!}$$

となる。ここで、 $x(t) = a + t(x - a)$ 、 $y(t) = b + t(y - b)$ と書いて、合成関数の微分を実行してみる。(1) における h を f として

$$\dot{g}(t) = f_x(x(t), y(t))\dot{x}(t) + f_y(x(t), y(t))\dot{y}(t), \quad \dot{g}(0) = f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b)$$

また (1) における h を f_x あるいは f_y として

$$\begin{aligned} \ddot{g}(t) = & (f_{xx}(x(t), y(t))\dot{x}(t) + f_{yx}(x(t), y(t))\dot{y}(t))\dot{x}(t) + f_x(x(t), y(t))\ddot{x}(t) \\ & + (f_{xy}(x(t), y(t))\dot{x}(t) + f_{yy}(x(t), y(t))\dot{y}(t))\dot{y}(t) + f_y(x(t), y(t))\ddot{y}(t) \end{aligned}$$

$\ddot{x}(t) = 0$ 、 $\ddot{y}(t) = 0$ だから $0 < \exists \theta < 1$ があって

$$\begin{aligned} f(x, y) - f(a, b) = & f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b) \\ & + \frac{1}{2} [f_{xx}(a + \theta(x - a), b + \theta(y - b))(x - a)^2 + f_{xy}(a + \theta(x - a), b + \theta(y - b))(y - b)(x - a)] \\ & + \frac{1}{2} [f_{yx}(a + \theta(x - a), b + \theta(y - b))(x - a)(y - b) + f_{yy}(a + \theta(x - a), b + \theta(y - b))(y - b)^2]. \end{aligned}$$

これから推測されるように、より一般的には以下ようになる:

定理 5.3 (Taylor の定理) 長方形領域 $I \times J$ 上で $f \in C^n(I \times J)$ とすると、

$$f(x, y) = \sum_{j+k=0}^{n-1} \frac{1}{j!k!} \frac{\partial^{j+k} f}{\partial x^j \partial y^k}(a, b)(x - a)^j (y - b)^k + R_n$$

となる。ここで

$$R_n = \sum_{j+k=n} \frac{1}{j!k!} (x - a)^j (y - b)^k \frac{\partial^{j+k} f}{\partial x^j \partial y^k}(a + \theta(x - a), b + \theta(y - b)), \quad (\exists \theta \in (0, 1)).$$

=====

極大値、極小値を求める一つの方法

命題 5.2 長方形領域 $I \times J$ で定義された関数 $f \in C^2(I \times J)$ が、領域の点 (a, b) で

$$f_x(a, b) = f_y(a, b) = 0, \quad \text{かつ} \quad H_f(a, b) = \begin{pmatrix} f_{xx}(a, b) & f_{yx}(a, b) \\ f_{xy}(a, b) & f_{yy}(a, b) \end{pmatrix} \quad \text{が負定値行列}$$

となるとする。すると、関数 f は $(x, y) = (a, b)$ で極大値をとる。

定義 5.3 長方形領域 $I \times J$ で定義された関数 $f \in C^1(I \times J)$ に対し、 $f_x(a, b) = f_y(a, b) = 0$ となる点 (a, b) を関数 $f(x, y)$ の停留点 (stationary point) という。

定義 5.4 $n \times n$ -行列 $A = (a_{ij})$ が負定値行列であるとは、任意の $\xi = {}^t(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \{(0, 0, \dots, 0)\}$ に対して

$$\xi \cdot A\xi = \sum_{i=1}^n \xi_i \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} \xi_j \right) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \xi_i \xi_j < 0$$

となることである。

特に $A = \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix}$ が負定値行列となる必要十分条件は

$$a < 0, \quad c^2 - ab < 0$$

である。実際、任意の $\xi = {}^t(\xi_1, \xi_2)$ に対して

$$\xi_1(a\xi_1 + c\xi_2) + \xi_2(c\xi_1 + b\xi_2) = a\xi_1^2 + 2c\xi_1\xi_2 + b\xi_2^2 < 0$$

となるための条件は、上に述べたものである。

命題 5.2 の証明: さて、 $f_x(a, b) = 0, f_y(a, b) = 0$ だから

$$f(x, y) = f(a, b) + R_2,$$

$$\begin{aligned} R_2 &= \frac{1}{2} [f_{xx}(\dots)(x-a)^2 + 2f_{xy}(\dots)(x-a)(y-b) + f_{yy}(\dots)(y-b)^2] \\ &= \frac{1}{2}(x-a, y-b) \cdot H_f(\dots) \begin{pmatrix} x-a \\ y-b \end{pmatrix}, \quad H_f(\dots) = \begin{pmatrix} f_{xx}(\dots) & f_{yx}(\dots) \\ f_{xy}(\dots) & f_{yy}(\dots) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

但し、記法上 $(\dots) = (a + \theta(x-a), b + \theta(y-b))$ とした。 $f \in C^2(I \times J)$ であるから、 $H_f(a, b)$ は負定値行列という仮定より、 (\dots) が (a, b) の十分近くにあるとき $H_f(\dots)$ も負定値行列。あとは、1変数の場合と同様の議論で、 (x, y) が (a, b) の十分近くにあるとき

$$f(x, y) \leq f(a, b) \quad \text{即ち、} f(x, y) \text{ は } (a, b) \text{ で極大。} \quad \square$$

注意: $H_f(a, b)$ が負定値でも正定値でもない場合、点 (a, b) が極値を与える点かどうか、一般的な判断はできない。関数の停留点であってそこで極値を与える点を極値点という。極値点以外の停留点は以下に説明する。

定義 5.5 一般に点 (a, b) は、二つのベクトル $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \neq 0$ が存在して t に関する関数 $g(t) = f(a + tx_1, b + ty_1)$ が $t = 0$ で極小、 s に関する関数 $h(s) = f(a + sx_2, b + sy_2)$ が $s = 0$ で極大となるとき、関数 $f(x, y)$ の峠点という。

例えば、関数 $f(x, y) = x^2 - y^2$ に対する停留点 $(0, 0)$ は、 $f(x, 0) = x^2$ が $x = 0$ で極小値、 $f(0, y) = -y^2$ が $y = 0$ で極大値を持つので、峠点である。

$$\begin{pmatrix} f_{xx}(0, 0) & f_{xy}(0, 0) \\ f_{yx}(0, 0) & f_{yy}(0, 0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

より一般に、関数 $f(x, y)$ に対する停留点 (a, b) , $f_x(a, b) = 0, f_y(a, b) = 0$, で

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} f_{xx}(a, b) - \lambda & f_{xy}(a, b) \\ f_{yx}(a, b) & f_{yy}(a, b) - \lambda \end{pmatrix} &= \det(H_f(a, b) - \lambda \mathbb{I}_2) \\ &= \lambda^2 - (f_{xx}(a, b) + f_{yy}(a, b))\lambda + f_{xx}(a, b)f_{yy}(a, b) - f_{xy}(a, b)f_{yx}(a, b) = 0 \end{aligned}$$

を満たす実根¹ λ_1, λ_2 の性質を調べる。これらは停留点 (a, b) での Hessian (ヘッセ行列) $H_f(a, b)$ に対応する固有値²になり、以下のように分類される。

- (i) $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$ ならば停留点 (a, b) は極小点、
- (ii) $\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0$ ならば停留点 (a, b) は極大点、
- (iii) $\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0$ ならば停留点 (a, b) は峠点、
- (iv) $\lambda_1 \lambda_2 = 0$ ならばその停留点 (a, b) の近辺の関数の挙動はこの情報だけでは不明。

5.6 より一般的な合成関数の微分について

以下に述べることは極めて大切だが、講義時間が足りないかもしれない。

変数変換

$$(u, v) \rightarrow (x, y) : \quad x = \phi(u, v), \quad y = \psi(u, v)$$

を与え、合成関数 $g(u, v) = f(\phi(u, v), \psi(u, v))$ を考える。定理 9(p.166) にある条件下で

$$\begin{aligned} \frac{\partial g(u, v)}{\partial u} &= \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u}, \\ \frac{\partial g(u, v)}{\partial v} &= \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v} \end{aligned}$$

となることは、明らかであろう。

特に応用として極座標変換を考察する。

$$(r, \theta) \rightarrow (x, y) : \quad x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

とするとき、 $\tilde{u}(r, \theta) = u(r \cos \theta, r \sin \theta)$ とおくと、

$$\begin{aligned} \tilde{u}_r(r, \theta) &= \frac{\partial \tilde{u}(r, \theta)}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r} = u_x \cos \theta + u_y \sin \theta, \\ \tilde{u}_\theta(r, \theta) &= \frac{\partial \tilde{u}(r, \theta)}{\partial \theta} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \theta} = -u_x r \sin \theta + u_y r \cos \theta \end{aligned}$$

となる。但し、 $u_x = u_x(r \cos \theta, r \sin \theta)$, $u_y = u_y(r \cos \theta, r \sin \theta)$ の意味である。

¹実数値解のこと。この式は虚根 (虚数値解というのか?) を持たないことはすぐ分かる

²行列とその固有値については線形代数の講義で説明される

更に

$$\begin{aligned}\tilde{u}_{rr}(r, \theta) &= \frac{\partial^2 \tilde{u}(r, \theta)}{\partial r^2} = (u_{xx} \cos \theta + u_{yx} \sin \theta) \cos \theta + (u_{xy} \cos \theta + u_{yy} \sin \theta) \sin \theta \\ &= u_{xx} \cos^2 \theta + (u_{yx} + u_{xy}) \sin \theta \cos \theta + u_{yy} \sin^2 \theta,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tilde{u}_{\theta r}(r, \theta) &= \frac{\partial^2 \tilde{u}(r, \theta)}{\partial \theta \partial r} = (-u_{xx} r \sin \theta + u_{yx} r \cos \theta) \cos \theta - u_x \sin \theta + (-u_{xy} r \sin \theta + u_{yy} r \cos \theta) \sin \theta + u_y \cos \theta \\ &= (-u_{xx} + u_{yy}) r \sin \theta \cos \theta + u_{yx} r \cos^2 \theta - u_{xy} r \sin^2 \theta - u_x \sin \theta + u_y \cos \theta,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tilde{u}_{r\theta}(r, \theta) &= \frac{\partial^2 \tilde{u}(r, \theta)}{\partial r \partial \theta} = -(u_{xx} \cos \theta + u_{yx} \sin \theta) r \sin \theta - u_x \sin \theta + (u_{xy} \cos \theta + u_{yy} \sin \theta) r \cos \theta + u_y \cos \theta \\ &= (-u_{xx} + u_{yy}) r \sin \theta \cos \theta - u_{yx} r \sin^2 \theta + u_{xy} r \cos^2 \theta - u_x \sin \theta + u_y \cos \theta,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tilde{u}_{\theta\theta}(r, \theta) &= \frac{\partial^2 \tilde{u}(r, \theta)}{\partial \theta^2} = -(-u_{xx} r \sin \theta + u_{yx} r \cos \theta) r \sin \theta + (-u_{xy} r \sin \theta + u_{yy} r \cos \theta) r \cos \theta - u_x r \cos \theta - u_y r \sin \theta \\ &= u_{xx} r^2 \sin^2 \theta + u_{yy} r^2 \cos^2 \theta - (u_{yx} + u_{xy}) r^2 \cos \theta \sin \theta - u_x r \cos \theta - u_y r \sin \theta,\end{aligned}$$

となることが示される。前と同様、 $u_{xx} = u_{xx}(r \cos \theta, r \sin \theta)$, etc である。これらから、

$$\tilde{u}_{rr}(r, \theta) + \frac{1}{r} \tilde{u}_r(r, \theta) + \frac{1}{r^2} \tilde{u}_{\theta\theta}(r, \theta) = (u_{xx} + u_{yy})(r \cos \theta, r \sin \theta),$$

$$\tilde{u}_r^2(r, \theta) + \frac{1}{r^2} \tilde{u}_\theta^2(r, \theta) = (u_x^2 + u_y^2)(r \cos \theta, r \sin \theta).$$

となる。

ここで、

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) u$$

をラプラシアン (Laplacian)、ラプラス作用素という。これの n -次元版は

$$\Delta u(x) = \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2} \right) u(x), \quad x = (x_1, \dots, x_n)$$

となる。

=====

問題 1 \mathbb{R} 上の連続関数 $g(x)$ が、任意の x, y に対し $g(x+y) = g(x) + g(y)$ を満たすならば、それは $g(x) = cx$ の形でなければならないことを示せ。

解答例：条件式から直ちに、任意の $n, m \in \mathbb{N}$ に対し $g\left(\frac{n}{m}x\right) = \frac{n}{m}g(x)$ が成立する。

$$\therefore g(2x) = 2g(x), \dots, g(nx) = ng(x), \quad g(x) = g\left(\frac{m}{m}x\right) = mg\left(\frac{1}{m}x\right), \quad g\left(\frac{1}{m}x\right) = \frac{1}{m}g(x).$$

q また、 $x = 0 = y$ として $g(0) = 0$ であり、 $g(0) = g(x-x) = g(x) + g(-x)$ を用いて $g(-x) = -g(x)$ となる。即ち、任意の有理数 $r \in \mathbb{Q}$ に対して $g(r) = rg(1)$ となる。

g の連続性 (以下の式の ↓ のところ) より $c = g(1)$ とおけば、 $g(x) = cx$ となる。実際、 x が無理数ならば有理数列 $\{r_n\}$ で $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = x$ となるものをとれば

$$g(x) = g\left(\lim_{n \rightarrow \infty} r_n\right) \stackrel{\downarrow}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} g(r_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} cr_n = cx. \quad \square$$

問題 2 \mathbb{R} 上の連続関数 $f(x)$ が、任意の x, y に対し $f(x+y) = f(x)f(y)$ を満たすならば、 $f(x)$ はどんな形の関数でなければならないか？

解答例：略解では『 $g(x) = \log |f(x)|$ とおけば $g(x+y) = g(x) + g(y)$ を満たす』とあるが、そもそも $g(x) = \log |f(x)|$ とおけるのか？ もし $|f(x)| = 0$ なる点があると $g(x) = \log |f(x)|$ が定義できなくなるのではないか？

$f(x) \equiv 0$ は条件を満たす。それ以外の f 、即ち、 $x_0 \neq 0$ があって $f(x_0) \neq 0$ となるときを考える。
 まず $f(x_0) > 0$ となる場合を考え、もし任意の x に対して $f(x) > 0$ となるならば、略解の議論が使える。正の整数 m に対し

$$f(x_0) = f\left(\frac{m}{m}x_0\right) = f\left(\frac{1}{m}x_0\right) \cdot f\left(\frac{m-1}{m}x_0\right) = \left(f\left(\frac{1}{m}x_0\right)\right)^2 \cdot f\left(\frac{m-2}{m}x_0\right) = \cdots = f\left(\frac{1}{m}x_0\right)^m > 0,$$

となり、

$$f(x_0)^{1/m} = f\left(\frac{1}{m}x_0\right), \text{ だから } f\left(\frac{n}{m}x_0\right) = f\left(\frac{1}{m}x_0\right)^n \neq 0,$$

となる。また、

$$f(0) = f\left(\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m}x_0\right) = \lim_{m \rightarrow \infty} f\left(\frac{1}{m}x_0\right) = \lim_{m \rightarrow \infty} f(x_0)^{1/m} = 1.$$

更に

$$f(0) = f(x_0 - x_0) = f(x_0)f(-x_0) = 1, \quad f(-x_0) = f(x_0)^{-1}, \quad \cdots.$$

これらより、任意の有理数 r に対して $f(rx_0) = f(x_0)^r$ となる。 a が無理数ならば有理数列 $\{r_n\}$ で $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = a$ となるものをとれば、

$$f(ax_0) = f\left(\lim_{n \rightarrow \infty} r_n x_0\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(r_n x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_0)^{r_n} = f(x_0)^a.$$

故に任意の $a \in \mathbb{R}$ に対し $f(ax_0) = f(x_0)^a$ となる。任意の x に対して $a = x/x_0$ とおけば

$$f(x) = f(ax_0) = f(x_0)^a = f(x_0)^{x/x_0} = \left(f(x_0)^{1/x_0}\right)^x > 0$$

となる。 $f(1) = f(x_0)^{1/x_0}$ より $c = \log f(1)$ とおけば $f(x) = e^{cx}$ となる。(略解の議論を使っていない!)

$f(x_0) < 0$ なる $0 \neq x_0$ が存在していると仮定する。

$$f(2x_0) = f(x_0)^2 > 0$$

より、 x_0 の代わりに $2x_0$ として議論をすれば良い。その結果、上の議論を繰り返して、任意の x に対して

$$f(x) = f\left(\frac{x}{2x_0} 2x_0\right) = f(2x_0)^{x/(2x_0)} > 0$$

となるから、 $f(x_0) < 0$ とはなり得ない。□

問題 3 任意の $x \in \mathbb{R}$ に対し $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$ が定義されることを示し、 $f(x+y) = f(x)f(y)$ なることを示せ。

この証明は諸君の楽しみに残しておこう。

=====

メモ：出席者 70 から 80 名位。講義は全く聴かずに答案用紙を受け取るだけの為に出てくる学生諸君も数名いたが、それが講義する者にとっての哀しい現実である。彼らの得点が高いのならばまだ救われるが、まずそういうことにはなっていない。また、講義室で良く聞いていてくれるようなのに点が出ていない諸君を見ると、より一層ダメージを受ける。それらの諸君は是非とも期末試験を頑張っ欲しいものである。答案の配点についての質問もあったが、解答例に詳しく書いておいたのでよく見て、それでも納得できない場合は答案持参で質問に来て欲しい。