「1 類 M 組　微分積分学第１中間試験解答例」　井上淳　2007.7.11.revised

試験中のヒント提供について：
試験中後半の 11 時半頃に、幾つかのヒントを出してしまった。『(1) については背理法を用いると良い、(2) については Cauchy 列を思い出そう。』ところが「Cauchy 列って何ですか」という質問が出て、分からない人の挙手を求めると 10 名以上はいたので、仕方ないと Cauchy 列の定義を板書してしまった。

これに対して、以下のような感想があった：

> 僕が今回たまたま少し分かって、かつ僕の人間が小さいからかもしれませんが試験中にヒント（今回は Cauchy 列のこと）を出されると、勉強したのが損みたい(本当はそうではないのはわかっているけど) で少し嫌です。

もっともな感想である。競争で点を多く取りたいと言う考えが残っていると、よりそう思うことがあろう。しかし、この講義の目標は、自分で考え自分で分かったという快感を得易くし、経験してもらう、である。点を取り易くしてでもとはいうものの、あまりに授業内容が伝わっていないことに対する老教員の怖れがそうさせたのである。そもそも約 120 − 150 点満点で 60 点以上を可とし、100 点以上は切り捨ててしまうのだから、点の多寡はあまり気にしないでよいようになっている。ともかく「自分で考え自分で分かったという快感」を追求して欲しいものである。しかし、それでも点数差は出るものであり、高得点の人の学籍番号を講義録（期末試験解答例）に記して賞賛することにしている。学籍番号が記載される人数は 15 名程度でしかない。

最後の切り札（続）:
「解けなかった」と感じた人は、どこから分からなくなったかレポートをメールして下さい！締め切り 7 月 19 日。(数式を扱うときは Tex や LaTex というソフトが便利)
（追記）メールするもしないも君達の勝手ですが、この操作は極めて大切で、分からないときのみならず何か困ったときに「どこからか、とか、何故か」を自分で探す訓練 になります。これにより、なまじ分かったつもりの人や困らないつもりの人より「進歩の可能性を確保」できます。これができないと、碁や将棋でいう「勝手読み」、即ち、「自分の都合の良いようにしか物事を解釈しない」ということになり、ひいては、「敵を知り己を知れば百戦危うからず」とは逆の悲惨なことになり得ますぞー。ところで、何度も言っているように、感想文とかは「講義に対する貢献」とみなします。

試験直後の印象：
問 3 は予告問題のためか質問は出なかったが、ツボを押さえた解答ができているかどうか、楽しみであった。時間前に答案を提出した人々の部分を少しみたが思いのほかできていないようである。ほとんど点が取れていない（勉強してこなかった？）人がいたが、どういう心境で試験に臨んだのか、大いに興味深い。
問 1 については、そうとの戸惑いを感じていたように思える。

少し採点しての印象：
物事を論理的に考えそれを記述できることは「知識人としての基本」であるが、難しいことで、なかなか苦労しているようである。しかし苦労すれば必ず進歩するのだから、努力して欲しいものである。

感想を読んで：
板書の改善を望む声が多かった。字を大きく、できればセンターの黒板４枚のみを使って、字を手で消さないで、というものであった。できるだけ試みてみよう。

========== 以下解答例 ==========

$\boxed{\mathbf{1}}$ [5 点] 「x を非負な実数とする。もし、任意の正数 ϵ に対して $x \le \epsilon$ となるならば、x は 0 である」ことを証明せよ。

[解答例]: 上の構文を分析する。「与えられた実数 x が負ではない」ということが「x を非負な実数とする」という意味である。だから、実数の性質 (i) より、x は正であるか 0 であるかのどちらかである。条件「任意の正数 ϵ に対して $x < \epsilon$ となる」を用いて「どちらか」になることを決めるのだが、実際どちらになるかどう決めたら良いのか論理的に説明せよ、と問うているのである。

もし $x = 0$ ならば確かに「任意の正数 ϵ に対して $x < \epsilon$ となる」を満たしている。そこで、x が 0 でないとしてみる。すると、大前提 $x \geq 0$ より $x > 0$ となる。ϵ は任意にとって良いのだから、特に $\epsilon = \frac{x}{2} > 0$ ととると、「上の主張の x に関する仮定」から $x < \frac{x}{2}$ となる。$x > 0$ と仮定したのだから、この式の両辺を $x > 0$ で割って $1 < \frac{1}{2}$ となるから、実数における大小関係に矛盾する。これは、$x \neq 0$ と仮定したことから起こる矛盾なので、仮定がおかしい。即ち、$x = 0$ でなければならない。　□

$\boxed{\mathbf{2}}$ [5 点] 「数列 $\{a_n\}$ は α に収束する」とはどういうことか定義を述べよ。更に「数列 $\{a_n\}$ は収束しない」を示すには何をどう示したら良いか述べよ。

[解答例]: 「数列 $\{a_n\}$ は α に収束する」記号では「$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$」とは

$$(\forall\epsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n)((n \geq N) \Longrightarrow |a_n - \alpha| \leq \epsilon),$$

或は「数列 $\{a_n\}$ が収束する」とは

$$(\exists\alpha)(\forall\epsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n)((n \geq N) \Longrightarrow |a_n - \alpha| \leq \epsilon)$$

となる。講義でもやったように、この定義と数列 $\{a_n\}$ が Cauchy 列になること

$$(\forall\epsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall m)(\forall n)((m, n \geq N) \Longrightarrow |a_n - a_m| \leq \epsilon)$$

が同値であった（ここでは Bolzano-Weierstrauss の補題がキーであった）。故に、「数列 $\{a_n\}$ は収束しない」を示すには「数列 $\{a_n\}$ は Cauchy 列をなさない」をいえばよい。ここで「記号論理学」の操作を用いて、否定命題を作る：

$$(\exists\epsilon > 0)(\forall N \in \mathbb{N})(\exists m)(\exists n)((m, n \geq N) \Longrightarrow |a_n - a_m| > \epsilon)$$

即ち、『数列 $\{a_n\}$ は収束しない』は『ある $\epsilon > 0$ があって、どんな N をとっても、ある $m, n > N$ があって $|a_m - a_n| > \epsilon$ となる』ということになる。勿論、形式上は

$$(\forall\alpha)(\exists\epsilon > 0)(\forall N \in \mathbb{N})(\exists n)((n \geq N) \Longrightarrow |a_n - \alpha| > \epsilon)$$

としてもよい。しかし、この条件を調べることは大変で、不可能にも見えるのだが、今回はこの答えでも可とした。ここでも、Bolzano-Weierstrass の威力を感じられるのでは！

● 「ある数列が Cauchy 列をなさない」の例として $S_n = \sum_{k=1}^{n} k^{-1}$ を挙げよう。

$$S_{2n} - S_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} > \frac{1}{2n} \times n = \frac{1}{2}.$$

これは、$\epsilon = 2^{-1}$ とするとき、任意の N をとり $2n, n > N$ とすると、$\{S_n\}$ が Cauchy 列にならない事を示している。

● 「数列 $\{a_n\}$ は α には収束しない」と「数列 $\{a_n\}$ は（どんな値にも）収束しない」とは異なる。例えば、$a_n = \frac{1}{n}$ は 1 には収束しない。

ここで、第 2 回 4 月 19 日の講義を再録しておこう：

論理について「背理法を用いる」ためには、ある命題の否定命題が分からないと、何をして良いか分からないことになる。そこで、命題論理の否定の方法を述べた：

命題論理について:『数列 $\{a_n\}$ が α に収束する』

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists N > 0)(\forall n)(n \geq N \Longrightarrow |a_n - \alpha| \leq \epsilon)$$

の否定命題『数列 $\{a_n\}$ は α に収束しない』とはどういうことか考えてみよう。

$$\text{数列 } \{a_n\} \text{ は } \alpha \text{ に収束しない。} \Longleftrightarrow (\exists \epsilon)(\forall N)(\exists n)\neg(n \geq N \Longrightarrow |a_n - \alpha| \leq \epsilon).$$

ところで、$(n > N \Rightarrow |a_n - \alpha| \leq \epsilon)$ の否定が $(n > N$ かつ $|a_n - \alpha| > \epsilon)$ となることは、以下の記号論理学の記述[1]を見ると推定できるであろう：まず、$(\neg\mathfrak{A})\vee\mathfrak{B}$ を $\mathfrak{A} \Rightarrow \mathfrak{B}$ と記述することにする。

$$(\neg\mathfrak{A})\vee\mathfrak{B} \equiv (\mathfrak{A} \Rightarrow \mathfrak{B}), \quad \neg(\mathfrak{A} \Rightarrow \mathfrak{B}) \equiv \neg((\neg\mathfrak{A})\vee\mathfrak{B}) \equiv \mathfrak{A} \wedge (\neg\mathfrak{B}),$$
$$\neg(\neg(\mathfrak{A} \Rightarrow \mathfrak{B})) \equiv \neg(\mathfrak{A} \wedge (\neg\mathfrak{B})) \equiv (\neg\mathfrak{A})\vee\mathfrak{B} \equiv (\mathfrak{A} \Rightarrow \mathfrak{B}).$$

$\boxed{\mathbf{3}}$ [20 点] 以下の式

$$\lim_{h\to 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$$

について論ぜよ（ヒント：大学に入って修得したであろう数学的考え方をもとに、これにはどう答えたらよいのか？何がツボ（肝要な点）であったか明示し答よ）。

略解例：2007 年 5 月 24 日 第 6 回講義内容に詳しく説明してありますから、もう一度読み直してみて下さい。

ツボ１ [5 点]：e はどう定義したか？実数の連続性との関係を明確に書く。即ち、自然数 n に対して $e_n = (1+\frac{1}{n})^n$ と定義したものが、有理数の中で「上に有界な単調増加列」となっていること、「実数の連続性」より、極限 $\lim_{n\to\infty} e_n$ が実数の中で存在し、それを e と記した。

ツボ２ [5 点]：幂乗の定義をどうするか？一般に指数関数の定義はどうしたか？単調な連続増加関数の逆関数は存在し連続であることを注意する。ツボ１で定めた数 e は $e > 1$ であること、一般に $a > 1$ に対して指数関数 a^x がどう定義されるか？まず、自然数 n に対し a^n が帰納的に定義される。有理数 $x = q/p$ に対しては $y > 1$ で単調増加連続な関数 y^p は $\xi^p = a^q$ なる $\xi > 1$ を唯一つ持つから、それを $\xi = a^{q/p}$ として定義したこと、これが指数法則を満たすことを示した。次に一般の x に対しては x を有理数で近似することで a^x を定義し、更に連続であることを示した。

ツボ３ [5 点]：まずツボ１での e の定義から、任意の $x > 1$ に対して自然数 n を $n \leq x < n+1$ と取ることによって

$$\lim_{x\to\pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

となることを示す。

実際、幂乗の定義より

$$\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

と

$$\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{-1} \to e,$$
$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\left(1 + \frac{1}{n}\right) \to e,$$

を用いれば良い。$x < -1$ の場合も同様の考察をすれば良いのだが、合点いったかな？

[1]以下の命題は集合論との比較で納得し易いだろう。集合論の方はこれは図視化できる、ベン図とかいうのでは？

ツボ４ [5 点]：$|h| \to 0$ のとき $1/|h| \to \infty$ だから、$x = 1/h$ として上の式を

$$\lim_{h\to 0}(1+h)^{1/h} = e$$

と書き換える。ここで、ツボ２で注意した指数関数の逆関数である対数関数の連続性を用いる。$(1+h)^{1/h}$ の対数をとり、

$$\frac{1}{h}\log(1+h) = \log(1+h)^{1/h} \to \log e = 1$$

となる。次に $u = e^h - 1$ とおくと $h = \log(1+u)$ であり、$h \to 0$ のとき $u \to 0$ であるから

$$\frac{e^h-1}{h} = \frac{u}{\log u} \to 1. \qquad \Box$$

注意：ツボ２の考察を除いて、いきなり $(1+\frac{1}{x})^x$ を定義するという答があった。$n \le x < n+1$ と取ることによって

$$1 + \frac{1}{n+1} < 1 + \frac{1}{x} \quad \text{であり} \quad \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n < \left(1+\frac{1}{x}\right)^n < \left(1+\frac{1}{x}\right)^x$$

となるところにツボ２の考察が用いられている。また $h = 1/n$ として

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \lim_{h\to 0}(1+h)^{1/h} = e$$

となる。だから $\lim_{h\to 0}\log(1+h)^{1/h} = 1$ という解答も多かったが、任意の h に対してそれが 0 に収束するというのと、特殊な $h = 1/n$ に対してというのでは一般的には隔たりがある！

また、対数関数の微分を考えるというのもあったが、この問題でその事実を使うと、同義語反復に近いと判断した。

注意：$f(h) = e^h - 1,\ g(h) = h$ とおき、 $g'(h) = 1 \ne 0$ であることに注意して l'Hospital の法則より

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(h)}{g(h)} = \lim_{h\to 0}\frac{f'(h)}{g'(h)} = \lim_{h\to 0}\frac{e^h}{1} = 1$$

となるという答があった。計算の方針は頷けるが、この問題は関数 e^x が定義より $x = 0$ で微分可能でその微分係数が 1 となることを 定義に戻って示せ といっているのである。これでは問題の答を問題の解法に使っている（これも同義語反復と思われる）と判断されるのでは？

注意：$e^x = \displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$ を用いるというのもあった。左辺の極限が存在する事の証明はどうするのか？また、たとえそれが存在したとしても、それが e という数の x 乗となっていることはどう示すのか？それが以下の問題を産み出す！

問題　$f(x)$ は C^1-級関数とする。任意の x, y に対し $f(x+y) = f(x)f(y)$ を満たすならば、ある定数 c があって $f(x) = e^{cx}$ となることを示せ。（この主張を正確に証明する為には、常微分方程式の解の一意性を用いる必要があるが、こうなるらしいことは分かるであろう）

注意：この問題はそれなりに面白いが、『$e^x = \displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$ が C^1-級関数で任意の x, y に対し $f(x+y) = f(x)f(y)$ を満たす』をどう示したら良いのか？

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝