微分積分学第一　１類Ｍ組 第９回講義内容（2007年6月14日）　井上淳

今日の目標：

(1) 合成関数の連続性と微分可能性、

(2) 高階微分、

==

中間試験実施について：6月21日（木）、3 - 4時限、W531

==

(I) 何故、$\lim_{h\to 0}\dfrac{e^h-1}{h}=1$ といえるのだろうか？

1 実数とは何か

2 関数 (連続関数とその性質)

(II) e は有理数ではない！Taylor の定理の威力の一端

3 微分可能性と幾つかの性質

3.1 Rolle の定理、平均値の定理、Cauchy の平均値の定理、l'Hôpital の法則

3.2 合成関数の連続性と微分可能性

定理 3.1 関数 $z=f(y)$ の定義域を D とし、関数 $y=g(x)$ の値域は D に含まれるとする。g は ξ で連続、f は $\eta=g(\xi)$ で連続とするとき、合成関数 $f\circ g(x)=f(g(x))$ は $x=\xi$ で連続である。

演習問題 3.1 この定理を証明せよ。(演習のレポート問題にもあったが、今ならきっとできるだろう*!*)

講義ではこれを証明した。仮定されているのは
(i) $\forall\epsilon>0,\exists\delta>0,s.t.\forall y,|y-\eta|\le\delta\Longrightarrow|f(\eta)-f(y)|\le\epsilon,$
(ii) $\forall\epsilon_1>0,\exists\delta_1>0,s.t.\forall x,|x-\xi|\le\delta_1\Longrightarrow|g(\xi)-g(x)|\le\epsilon_1.$
(i) における η として $g(\xi)$ ととる。(ii) における ϵ_1 は任意だから、(i) で決められた δ をとる。こうすると、(i) より $\forall\epsilon>0$ に対して $\exists\delta>0$ がきまり、更に (ii) で $\epsilon_1=\delta$ として δ_1 が決まる（即ち、$\forall\epsilon>0$ に対して δ_1 が決まることになる）。すると $y=g(x),\eta=g(\xi)$ として $|g(\xi)-g(x)|\le\delta$ ならば (i) より $|f(g(\xi))-f(g(x))|\le\epsilon$。結局、

$$\forall\epsilon>0,\exists\delta_1>0,s.t.|x-\xi|\le\delta_1\Longrightarrow|f(g(\xi))-f(g(x))|\le\epsilon.\qquad\square$$

演習問題 3.2 上の証明を下に述べてある *Landau* の記号 $o(\cdot)$ を用いて説明し直してみよ。

注意:『講義録に $f : I = [a, b] \to \mathbb{R},\ g : J = [c, d] \to \mathbb{R}$ とあるが、これは何ですか？』という質問があった。$f : I = [a, b] \to \mathbb{R}$ とは、区間 $I = [a, b]$ の中の元 x に対して実数 $\mathbb{R}$ の中の元が一つ決まって、それを $f(x)$ と書くということである。同様に $g : J = [c, d] \to \mathbb{R}$ とは区間 $J = [c, d]$ の中の元 y に対して実数 $\mathbb{R}$ の中の元が一つ決まって、それを $g(y)$ と書くということである。もし、任意の $x \in I = [a, b]$ に対して $f(x) \in J = [c, d]$ ならば、任意の $x \in I = [a, b]$ に対して $g(f(x))$ が定義され得る！また、『任意の $x \in I = [a, b]$ に対して $f(x) \in J = [c, d]$』を簡単に『$f(I) \subset J$』と記し、「関数 f の値域は J に含まれる」という。

Landau の記号[1]：例えば、$\lim_{x\to a} f(x) = 0,\ \lim_{x\to a} g(x) = 0$ のときもし $x = a$ の近くで $g(x) \neq 0$ であり $\lim_{x\to a} f(x)/g(x) = 0$ ならば、$x \to a$ のとき $f(x)$ の方が $g(x)$ より 高位の無限小 であるといい

$$f(x) = o(g(x)) \quad (x \to a)$$

と書いた。これは、任意の $\epsilon > 0$ に対してある $\delta > 0$ があって

$$|x - a| \leq \delta \text{ ならば } \quad \left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| \leq \epsilon$$

となることである。同様に、

$$f(x) = o(1) \quad (x \to a)$$

とは、任意の $\epsilon > 0$ に対してある $\delta > 0$ があって

$$|x - a| \leq \delta \text{ ならば } \quad |f(x)| \leq \epsilon$$

となることである。

この記号を用いると、微分可能性の定義

$$(\exists\alpha)(\forall\epsilon > 0)(\exists\delta > 0)(\forall h)(|h| \leq \delta \Longrightarrow \big|f(a + h) - f(a) - \alpha h\big| \leq \epsilon|h|)$$

は

$$(\exists\alpha)(\exists\delta > 0)(\forall h)(|h| \leq \delta \Longrightarrow f(a + h) - f(a) - \alpha h = o(h))$$

と書ける。上での α を $f'(a)$ と書いた。少し簡略化して f が a で微分可能なることを象徴的に

$$f(a + h) - f(a) - f'(a)h = o(h) \quad (h \to 0)$$

とも書く。この記号 $o(h)$ のご利益は、合成関数の微分公式のときにあらわれる。

定理 3.2 関数 $z = f(y)$ の定義域を D とし、関数 $y = g(x)$ の値域は D に含まれるとする。g は ξ で微分可能、f は $\eta = g(\xi)$ で微分可能とするとき、合成関数 $f\circ g(x) = f(g(x))$ は $x = \xi$ で微分可能であり、ξ における微分係数は次式で与えられる。

$$(f\circ g)'(\xi) = f'(\eta)g'(\xi)\Big|_{\eta=g(\xi)}, \quad \text{即ち} \quad \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}. \tag{1}$$

証明：微分可能性より $h \to 0$ 或いは $k \to 0$ のとき、

$$g(\xi + h) - g(\xi) - g'(\xi)h = o(h), \quad f(\eta + k) - f(\eta) - f'(\eta)k = o(k). \tag{2}$$

そこで

$$f(g(\xi + h)) - f(g(\xi)) - f'(g(\xi))g'(\xi)h = o(h) \quad (h \to 0) \tag{3}$$

[1] 5 月 31 日講義録より。

を示せば良い。(2) の第２式で特に

$$\eta = g(\xi), \quad k = g'(\xi)h + o(h)$$

と置くと、$h \to 0$ ならば $k \to 0$ である。$r_g(\xi, h) = g(\xi+h) - g(\xi) - g'(\xi)h$ を $r_g(\xi, h)$ と書く[2]と

$$\begin{aligned} f(g(\xi+h)) &= f(g(\xi) + g'(\xi)h + r_g(\xi, h)) \\ &= f(g(\xi)) + f'(g(\xi))(g'(\xi)h + r_g(\xi, h)) + o(g'(\xi)h + r_g(\xi, h)) \\ &= f(g(\xi)) + f'(g(\xi))g'(\xi)h + f'(g(\xi))r_g(\xi, h) + o(g'(\xi)h + r_g(\xi, h)) \end{aligned}$$

となる[3]。

$$f'(g(\xi))r_g(\xi, h) + o(g'(\xi)h + r_g(\xi, h)) = o(h)$$

だから (3) が導かれ、関数 $f \circ g(x) = f(g(x))$ が $x = \xi$ で微分可能でありその微分係数が $f'(g(\xi))g'(\xi)$ であることを示している。 □

3.3 逆関数の連続性と微分可能性

前回の講義では、いきなり鎖公式 (1) を仮定して以下の定理の応用を述べた：

定理 3.3 関数 $y = f(x)$ は ξ を含む或る区間 $[a, b]$ で狭義単調かつ連続とする。f の値域は $[f(a), f(b)]$ であり逆関数 f^{-1} は $[f(a), f(b)]$ 上の連続関数である。また、f が $x = \xi$ で微分可能で、 $f'(\xi) \neq 0$ ならば、 f の逆関数 f^{-1} は $\eta = f(\xi)$ で微分可能で

$$(f^{-1})'(\eta) = \left.\frac{1}{f'(\xi)}\right|_{\xi = f^{-1}(\eta)}, \quad \text{即ち} \quad \frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}.$$

証明: (i) 任意の $\eta (f(a) < \eta < f(b))$ に対し中間値の定理より $f(\xi) = \eta$ となる $\xi (a < \xi < b)$ が存在し、それを $\xi = f^{-1}(\eta)$ と書いた。f の値域は $[f(a), f(b)]$ だから、f^{-1} の定義域は $[f(a), f(b)]$ となる。

(ii) 逆関数 f^{-1} の狭義単調増加性：$f(a) \leq \eta_1 < \eta_2 \leq f(b)$ をとり $\xi_1 = f^{-1}(\eta_1), \xi_2 = f^{-1}(\eta_2)$ とおく。もし $\xi_1 \geq \xi_2$ とすると f の狭義単調性 $\eta_1 = f(\xi_1) \geq f(\xi_2) = \eta_2$ となり $\eta_1 < \eta_2$ に矛盾する。故に、$\eta_1 < \eta_2$ ならば $f^{-1}(\eta_1) < f^{-1}(\eta_2)$ となる。

(iii) 逆関数 f^{-1} の連続性：定義域 $[f(a), f(b)]$ の点 η をとり η に収束する任意の狭義単調列 $\{y_k\}$ をとる。$x_k = f^{-1}(y_k)$ とおくと $a \leq x_k \leq b$ であり、f^{-1} が狭義単調だから $\{x_k\}$ も有界で狭義単調列になる。実数の連続性から x_k はある実数 ξ に収束する。f が連続だから、$f(x_k) \to f(\xi)$ であり、x_k は $\xi = f^{-1}(\eta)$ に収束する。即ち、$y_k \to \eta$ のとき $f^{-1}(y_k) \to f^{-1}(\eta)$ となる。

(iv) 逆関数 f^{-1} の微分可能性：十分小さな h をとり $k = f^{-1}(\eta + h) - f^{-1}(\eta)$ とおくと、上で述べたことより $h \to 0$ と $k \to 0$ とは同等なることが分かる。$\xi = f^{-1}(\eta)$ とし関係式 $\xi + k = f^{-1}(\eta + h)$ を f で写すと $f(\xi + k) = f(\xi) + h$ となるから

$$\lim_{h \to 0} \frac{f^{-1}(\eta + h) - f^{-1}(\eta)}{h} = \lim_{k \to 0} \frac{k}{f(\xi + k) - f(\xi)} = \frac{1}{f'(\xi)}. \qquad \square$$

（注意）この最後の式は $f(f^{-1}(x)) = x$ なる関係式を合成関数の微分公式を用いて微分すれば従う。

$$f'(f^{-1}(x))\frac{df^{-1}(x)}{dx} = 1, \quad \frac{df^{-1}(x)}{dx} = \left.\frac{1}{f'(y)}\right|_{y = f^{-1}(x)}. \quad \text{即ち} \quad \frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}.$$

[2] $r_g(\xi, h)$ なる記号を用いず、$o(h)$ として計算していくのが通例である。それが**関数の具体形を書かずにその h に関する位数にのみ注目**した $o(\cdot)$ という記号導入の主目的である。

[3] この式の中では $o(\cdot)$、$r_g(\xi, h)$ が混在しているが、$o(\cdot)$ の部分は (2), (3) から来ている。

注意：この $dx/dy = 1/(dy/dx)$ なる記法は誤解を招くことがある。２変数以上の関数の偏微分がかかわるとき、**この記法の真似はしてはならない！**

以下は導関数についてのよく用いられる事柄であるが、どうしてそうなるのかは各自計算し、もし分からないときは質問に来て欲しい。

$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$
x^α	$\alpha x^{\alpha-1}$	a^x	$a^x \log a\ (a>0)$
e^x	e^x	$\log x$	$\frac{1}{x}$
$\sin x$	$\cos x$	$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\ (-1<x<1)$
$\cos x$	$-\sin x$	$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\ (-1<x<1)$
$\tan x$	$\sec^2 x$	$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}\ (-\infty<x<\infty)$
$\mathrm{cosec}\ x$	$-\mathrm{cosec}\ x \cot x$	$\mathrm{arccosec}\ x$	$-\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\ (1<x<\infty)$
$\sec x$	$\sec x \tan x$	$\mathrm{arcsec}\ x$	$\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\ (1<x<\infty)$
$\cot x$	$-\mathrm{cosec}^2 x$	$\mathrm{arccot}\ x$	$\frac{1}{1+x^2}\ (-\infty<x<\infty)$

3.4 Landau の記号：スモールオー “o”, ラージオー “O” 再録

[講義では割愛] 数列 $\{a_n\}$、$\{b_n\}$ が $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$、$\lim_{n\to\infty} b_n = 0$ を満たすとする。

● もし、$\lim_{n\to\infty}(a_n/b_n) = 0$ ならば、$a_n = o(b_n)$ と記し、 $\{a_n\}$ は $\{b_n\}$ より高位の無限小であるという。これは $n \to \infty$ のとき、数列 $\{a_n\}$ が数列 $\{b_n\}$ より速く 0 に収束するということである。

● ある正数 K が存在して、すべての n に対して $|a_n/b_n| \le K$ が成立するとき、 $a_n = O(b_n)$ と記し、a_n は b_n で押さえられるという。これは $n \to \infty$ のとき、数列 $\{a_n\}$ の 0 への収束の速さが $\{b_n\}$ より速いか、または同程度であることを示す記号である。

● 上の記号は、数列以外にも用いられる。即ち、$\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$, $\lim_{x\to x_0} g(x) = 0$ とする。

(i) $\lim_{x\to x_0, x\ne x_0}(f(x)/g(x)) = 0$ ならば、$f(x) = o(g(x))\ (x \to x_0)$、$x_0$ において $f \ll g$, と記し、x_0 において $f(x)$ は $g(x)$ より高位の無限小である[4]という。これは $x \to x_0$ のとき、関数 $f(x)$ が 関数 $g(x)$ より速く 0 に収束するということ。

(ii) また、ある正数 K が存在して、x_0 の近くのすべての x に対して $|f(x)/g(x)| \le K$ が成立するとき、$f(x) = O(g(x))\ (x \to x_0)$、$x_0$ において $f \preccurlyeq g$, と記し、x_0 において $f(x)$ は $g(x)$ で押さえられるという。これは $x \to x_0$ のとき、数列 $f(x)$ の 0 への収束の速さが $g(x)$ より速いか、または同程度であることを示す記号である。

例１：$a > b$ のとき $x^a = o(x^b)\ (x \to 0)$.

例２：$\sin x = O(1)\ (x \to \infty)$, $\sin x = O(x)\ (x \to 0)$.

例３：任意の $a > b > 0$ に対し $x \to +\infty$ のとき

$$\log\log x \ll \log x \ll x^b \ll x^a \ll e^x \ll e^{e^x}.$$

[4] 或いは「x_0 において $f(x)$ は $g(x)$ に較べて無視できる」。

命題 3.1　以下が成立する：

$$f \ll g \Longrightarrow f \precsim g,$$
$$f \precsim g,\ g \precsim h \Longrightarrow f \precsim h,$$
$$f \ll g,\ g \precsim h\,(or\ f \precsim g,\ g \ll h) \Longrightarrow f \ll h,$$
$$f \ll g,\ g \ll h \Longrightarrow f \ll h,$$
$$f \ll h,\ g \ll h \Longrightarrow f \pm g \ll h,$$
$$f \ll h,\ g \precsim k \Longrightarrow fg \ll hk.$$

注意：ランダウの記号 $o(h)$, $O(h)$ は関数の具体的な形が必要でなく、その無限小或いは無限大の位数のみが知りたいときに便利。しかし、取扱いには注意が必要。例えば、$o(h)+o(h)=o(h)$ から $o(h)$ を引いて $o(h)=0$ とはできない！

4　Taylor の定理

4.1　高階微分について

関数 $f(x)$ が $x=a$ で微分可能なとき、その微分係数を $f'(a)$ と書いた。もし、関数 f が区間 I のすべての点 x で微分可能とすると、区間 I の各点 x にそこでの微分係数 $f'(x)$ を対応させる関数が定義されたことになり、それも $f'(x)$ と書く。もし、この関数が区間 I で微分可能なとき、その微分係数を $f''(x)$, $f^{(2)}(x)$ と書き、f の 2 階微分という。以下、この操作を繰り返せるときは繰り返して、高階の微分 $f^{(k)}(x)$ が定まる。$f^{(k)}(x)$ が存在するとき、$f^{(k)}(x)$ は連続かどうか分からないが、$f^{(k-1)}(x)$ は連続である。区間 I が開区間のときはこのままでよいが、閉区間のときは、端点では右微分とか左微分という言葉を用いる必要があろう。

Leibnitz の公式：関数の積の微分について、f, g が何回でも微分可能ならば

$$(fg)' = f'g + fg', \quad (fg)'' = f''g + 2f'g' + fg''$$

はすぐに示せる。より一般に以下の公式は数学的帰納法で証明できる。

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k)} g^{(k)}.$$

この公式を用いて、$f(x) = \arcsin x$ の n 階導関数の 0 での値 $f^{(n)}(0)$ を求めよう。

$\sin f(x) = x$ だから

$$f'(x) = \frac{1}{\cos f(x)} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 f(x)}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-1/2}$$

となる。故に 2 乗して $(f'(x))^2(1-x^2) = 1$ となるから、これを微分して

$$(1-x^2)2f'f'' - 2xf'^2 = 0.$$

f' は 0 にならないので $2f'$ で割って

$$(1-x^2)f'' - xf' = 0$$

が求まる。この式に Leibnitz の公式を適用すると

$$\left\{(1-x^2)f^{(n+2)}(x) + \binom{n}{1}(-2x)f^{(n+1)}(x) + \binom{n}{2}(-2)f^{(n)}(x)\right\} - \left\{xf^{(n+1)}(x) + \binom{n}{1}1\cdot f^{(n)}(x)\right\} = 0.$$

整理して

$$(1-x^2)f^{(n+2)}(x)-(2n+1)xf^{(n+1)}(x)-n^2f^{(n)}(x)=0$$

となる。$x=0$ を代入して

$$f^{(n+2)}(0)=n^2f^{(n)}(0)\quad (n=0,1,\cdots).$$

一方

$$f(0)=\arcsin\ 0=0,\quad f'(0)=(1-x^2)^{-1/2}\Big|_{x=0}=1$$

だから、

$$f^{(n)}(0)=\begin{cases}0 & n\,\text{が偶数のとき},\\ (n-2)^2(n-4)^2\cdots3^2\cdot1^2\cdot1=((n-2)!!)^2 & n\,\text{が奇数のとき}.\end{cases}$$

○連続微分可能な関数のクラスについて。

定義 4.1 区間 (a,b) 上の関数 $f(x)$ が C^k 級であるとは、$f(x)$ の k 階微分 $f^{(k)}(x)$ が存在して区間 (a,b) で連続であることとする。それを、$f\in C^k(a,b)$ と書く。

4.2 Taylor の定理

定理 4.1 (Taylor の定理) 区間 $(a-\epsilon_1,b+\epsilon_2)$（$\epsilon_1,\epsilon_2>0$）で C^n 級の関数 $f(x)$ に対し

$$f(b)=f(a)+f'(a)(b-a)+\cdots+\frac{f^{(n-1)}(a)}{(k-1)!}(b-a)^{n-1}+\frac{1}{n!}f^{(n)}(c)(b-a)^n$$

となる点 $c\in(a,b)$ が存在する。

証明：[以下で下線を付けた所は「予定」では間違った部分である。] 関数 $g(x)$ を

$$g(x)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(b-x)^k}{k!}f^{(k)}(x)+A(b-x)^n$$

とし、 Rolle の定理を適用できるように A を定める[5]：

$$\underline{g(b)=f(b)},\quad \underline{g(a)}=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(b-a)^k}{k!}f^{(k)}(a)+A(b-a)^n$$

だから、$g(a)=g(b)$ となるように

$$A=\frac{1}{(b-a)^n}\left(\underline{f(b)}-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(b-a)^k}{k!}f^{(k)}(a)\right)$$

と定める。これより Rolle の定理を用いて、$a<c<b$ があって $g'(c)=0$ となる。一方、

$$g(x)=f(x)+\frac{b-x}{1!}f'(x)+\frac{(b-x)^2}{2!}f''(x)+\cdots+\frac{(b-x)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(x)+A(b-x)^n$$

だから、微分して

$$\begin{aligned}g'(x)=f'(x)&+\left(-f'(x)+\frac{b-x}{1!}f''(x)\right)+\left(-\frac{b-x}{1!}f''(x)+\frac{(b-x)^2}{2!}f'''(x)\right)\\&+\cdots+\left(-\frac{(b-x)^{n-2}}{(n-2)!}f^{(n-1)}(x)+\frac{(b-x)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n)}(x)\right)-nA(b-x)^{n-1}\\=&\frac{(b-x)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n)}(x)-nA(b-x)^{n-1}\end{aligned}$$

[5] 2002 年度には「Taylor さんはどう考えてこの定理を見つけたのですか？凄いですね」という質問があった。

となる。故に、

$$0 = g'(c) = \frac{(b-c)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(c) - nA(b-c)^{n-1}, \quad f^{(n)}(c) = n!A.$$

即ち、

$$\frac{f^{(n)}(c)}{n!}(b-a)^n = \underline{f(b)} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a). \qquad \square$$

注意。上の定理で「区間 $(a-\epsilon_1, b+\epsilon_2)$ $(\epsilon_1, \epsilon_2 > 0)$」という表現をしたのは、区間の端点 a, b での微分可能性についていちいち右微分、左微分と断るのが面倒だったためである。

注意：Taylor の定理において

$$R_n = f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(x-\xi)^k}{k!} f^{(k)}(\xi)$$

とおくと、上の定理では

$$R_n = \frac{(x-\xi)^n}{n!} f^{(n)}(\xi + \theta^{\{n\}}(x-\xi)) \quad (0 < \theta^{\{n\}} < 1)$$

なるものが現われたがこれを Lagrange の剰余という。ここで、数 $\theta^{\{n\}}$ は f にも x, ξ にも依っているが、それらへの依存を明示しなかった。この記号は単に、$\theta^{\{n\}}$ と $\theta^{\{1\}}$ を区別するためのものである。Cauchy の剰余という次の表現もある：

$$R_n = \frac{(1-\theta^{\{1\}})^{n-1}(x-\xi)^n}{(n-1)!} f^{(n)}(\xi + \theta^{\{1\}}(x-\xi)) \quad (0 < \theta^{\{1\}} < 1).$$

Lagrange の剰余は

$$g(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(b-x)^k}{k!} f^{(k)}(x) + A^{\{n\}}(b-x)^n$$

とし、この関数 $g(x)$ が $g(b) = g(a)$ を満たすように $A^{\{n\}}$ を定め、これに Rolle の定理を適用して求まる。一方、Cauchy の剰余は

$$g(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(b-x)^k}{k!} f^{(k)}(x) + A^{\{1\}}(b-x)$$

とし同様の操作で求まる。

これから直ちに、読者は

$$g(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(b-x)^k}{k!} f^{(k)}(x) + A^{\{\ell\}}(b-x)^\ell \quad (\ell = 1, 2, \cdots, n)$$

とし同様の操作で何が得られるか興味を持って、さっきまで重かった鉛筆も急に軽くなって紙の上を走り出してはいないだろうか？この異なる表現が必要な例は、次回述べる Taylor 展開の計算で与えられる。

＝＝＝＝＝＝＝

メモ：出席者が少し減ったようである。もう少しで「もっとも苦しい箇所を通過し終わる」ので、ギブアップしないで食いついていて欲しい。午後 A 君、K 君が質問に来た。全く分からないと豪語していた K 君に少しずつ変化が見られてきてこちらも楽しい。ちょっと甘えん坊の A 君ももうちょっと我慢して「考えて」欲しい（詰め碁や詰め将棋の解答をすぐには見ないで自ら納得するまで試行錯誤することと同様）！来週質問にくるだろう Y さんも、もうちょっとの辛抱で、分かってくるはず。