

1 変数関数の微分

1 次の関数を微分せよ.

$$(1) \quad \sin^{-1}(\sqrt{\sin x}), \quad (2) \quad \tan^{-1} \frac{a+x}{1-ax}, \quad (3) \quad x^{\sin x} \quad (x > 0).$$

2 (1) $y = \sin^{-1} x \cdot \cos^{-1} x$ に対して

$$(1-x^2)y'' - xy'$$

を計算せよ.

3 (1) $y = \sin(a \sin^{-1} x)$ (a は定数) は

$$(1-x^2)y'' - xy' + a^2y = 0 \quad (-1 < x < 1)$$

を満たす事を示せ.

(2) $y^{(n)}(0)$ ($n = 1, 2, \dots$) を求めよ.

極限

1 次の極限值を求めよ.

$$(1) \quad \lim_{x \rightarrow 1} (1 - \log x)^{\frac{1}{\log x}}, \quad (2) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x x \sin x - x \sin x}{x - \sin x}, \quad (3) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{x} - \frac{1}{\log(1+x)} \right\},$$

$$(4) \quad \lim_{x \rightarrow +0} x^x, \quad (5) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(e^x - 1)}{x - \log(1+x)}, \quad (6) \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{e^{\sin x} - e}{\log \sin x}, \quad (7) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{a^x + b^x}{2} \right)^{\frac{1}{x}}.$$

2

(1) 次の極限が有限の値に収束するように定数 a を定め, その極限值を求めよ.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^3} \left(\log \frac{1+x}{1-x} - ax \right).$$

(2) 極限

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^3 \left\{ \tan^{-1} x - a + \frac{b}{x} \right\}$$

が有限確定となるように定数 a, b の値を定めよ. またそのときの極限值を求めよ. ただし \tan^{-1} は \tan の逆関数の主値を表す.

方程式の解

1 方程式 $\sin^{-1} x = 2 \cos^{-1} x$ を解け.

2

$$\tan^{-1} \frac{1}{x} + \tan^{-1} \frac{1}{y} = \frac{\pi}{4}$$

を満たす自然数 x と自然数 y で $x \leq y$ を満たすものを求めよ.

偏微分

1 次の関数の偏導関数 f_x および f_y を求めよ。

$$(1) \quad f(x, y) = \tan^{-1} \frac{x+y}{x-y}, \quad (2) \quad f(x, y) = \log \left(x + \sqrt{x^2 + y^2} \right).$$

関数の極値

1 次の関数の極値を求めよ。

$$(1) \quad f(x, y) = x^3 - 3xy + y^3, \quad (2) \quad f(x, y) = (x^2 - 2y^2) \exp\{-(x^2 + y^2)\},$$
$$(3) \quad f(x, y) = xy(x^2 + y^2 - 4a^2), \quad (4) \quad f(x, y) = x^4 + y^4 - x^2 + xy - y^2.$$