「6+7 類 V 組　微分積分学第 1 期末試験解答例、成績、その他」　　井上淳，2006.8.8.

試験中のヒント：多数提供！詳しくは「問題用紙」の方を参照して欲しい。

採点について：中間試験の出来を勘案して、期末試験の総得点を 50 点から 70 点に上げることとした。この甘めの採点が、諸君の勉学意欲向上に好結果をもたらすかは判然としないが、現時点では厳しい採点をしただけでは勉学意欲増進を期待できないと私は考えている。例えば、この同じ試験でヒント無しで厳しい 50 点の採点をすれば、3 割ぐらいしか合格しない事になろう。しかし、この試験は、今まで得点しか気にしなかった人々に「考える事の苦しさと楽しさ」を理解して貰う事が目的で、落第生を増やす事が目的ではない。また「追試験」という選択もあるが、あまり効果も期待できないので、追試は現時点では考えていない。

そこで、たとえ今学期不合格でも、後学期に頑張って、今回の期末試験との合計が 140 点を越えた者に対しては、今学期の得点を 60 点と修正するつもりである。但し、今回満点で次回 40 点の場合は、次回分は 40 点のまま不合格とする。

今回は極めて甘めに採点したせいか、不合格 11 名（受験者総数 97 名、欠席 10 名）、平均点は

合格者平均 82.7、不合格者平均 43.5、全体平均 78.1

だった（演習も同じ点数がつく）。高得点した諸君の健闘を讃えて学籍番号を書いておく。この人々の成績評価は皆 100 点となっているが、最高点は 116/120 だった。

$$06-22457, 06-19745, 06-16379, 06-26722, 06-09698, 06-00728,$$
$$06-04614, 06-05513, 06-10483, 06-25770, 06-24960, 06-10715,$$
$$06-18993, 06-20323, 06-02390, 06-06553, 06-21564.$$

その他、90 点以上 14 名、うち 95 点以上が 6 名程いる。

答案は後学期の最初の授業で返却する予定である。採点ミスの訂正要請はその時にのみ受け付けるので、この答案例を良く読んで自分の答案の減点理由がおかしいと思う時は反応できるように！

この期末試験で集中して考える 3 時間を経験して、「考えるという基本操作」の一端を感じられたとすれば、幸いである。なお、最後に「老教員の感想」を書いておくので、それに対する意見も歓迎する。

==

$\boxed{\mathbf{1}}$ $0<a,\ 0<b$ として、以下の極限値を求め、その計算過程を明示せよ。

$$(i)\ \lim_{x\to(\pi/2)-0}(\tan x)^{\cos x},\quad (ii)\ \lim_{x\to 0}\frac{a^x-b^x}{x},\quad (iii)\ \lim_{x\to-\infty}(a^x+b^x)^{1/x}.$$

重要な注意：以下の解答例で l'Hospital の法則を用いるとき、「何々の形の不定形だから」と断っていないと、数値はあっていても 2 点減点した。それは何故か？(以下 (ii) の注意の項参照)

教訓：議論をするとき（暗黙の）大前提の調整をしていないと、議論がかみ合わない！

他人が勝手に思い込んでいる前提をうまく利用するのが、耐震疑惑付建物であるし、それを陰ながら支援してしまっている管理官庁は購買者の「自己責任」とするので、ご用心（もっとも、昔から「安物買いの銭失い」という!)。「シンドラー社エレベータ」は高層建築物用の高速高機能安価なものとして「経費切り詰め」のみを重んじるところにうまく売り込んだが、「安全性」については「どこか然るべき機関がやっている」と購入側が勝手に思い込んでいたのでは？

僅かの減点でこの怖い現実を「身に沁みて分かる」ことは期待できないかもしれないなあ！

[略解]：(i) [10] $f(x) = (\tan x)^{\cos x}$ とおく。極限の取り方 より $0 < x < \pi/2$ としてよいから $\sin x > 0, \cos x > 0$ であり、対数をとって $\log f(x) = \cos x \log(\tan x) = \cos x \log(\sin x) - \cos x \log(\cos x)$ となる。$x \to (\pi/2) - 0$ のとき $t = \cos x \to 0$ であり、$\lim_{t \to 0} t \log t = 0$ となる。一方、$\sin x \to 1$ だから $\cos x \log(\sin x) \to 0$ で $\log f(x) \to 0$ となるから、$\lim_{x \to (\pi/2)-0} f(x) = 1.$

別解：$\log f(x) = \frac{\log(\tan x)}{(\cos x)^{-1}}$ は $x \to (\pi/2) - 0$ のとき $\frac{\infty}{\infty}$ となる不定形で

$$\frac{(\log(\tan x))'}{((\cos x)^{-1})'} = \frac{\cos x}{(\sin x)^2} \to 0 \quad (x \to (\pi/2) - 0)$$

だから l'Hospital の法則が適用できて、$\lim_{x \to (\pi/2)-0} \log f(x) = 0$ となる。

気になる事：$\lim_{x \to (\pi/2)-0}$ という 記法についての質問が出なかった。「x が $\pi/2$ より小さい方から $\pi/2$ に近づく」という事なのだが、皆が理解していたとは素晴らしい、さすがに東工大生！

(ii) [10] $f(x) = a^x - b^x$ とおき $(a^x)' = a^x \log a$ に注意すると

$$\lim_{x \to 0} \frac{f'(x)}{x'} = \lim_{x \to 0}(a^x \log a - b^x \log b) = \log a - \log b$$

となる。$\lim_{x \to 0} f(x) = 0$ だから、$\frac{0}{0}$ となる不定形で l'Hospital の法則を適用できて

$$\lim_{x \to 0} \frac{a^x - b^x}{x} = \log a - \log b.$$

別法：a^x に、$x = 0$ で 2 次までの Taylor の定理を適用すれば、

$$a^x = a^0 + (\log a)x + \frac{a^{\theta x}(\log a)^2}{2!}x^2, \qquad 0 < \exists\theta < 1$$

となる。故に

$$\frac{a^x - b^x}{x} = \log a - \log b + \frac{a^{\theta x}(\log a)^2 - b^{\theta' x}(\log b)^2}{2!}x \qquad 0 < \exists\theta, \theta' < 1.$$

これより、$\lim_{x \to 0}$ のとき $a^{\theta x}, b^{\theta' x}$ は有界に留まるから所期の結果が得られる。

注意：上に述べた l'Hospital の法則の条件をチェックしないとどんな不都合が起こるのか？例えば、

$$\lim_{x \to +0} \frac{a^x + b^x}{x} = +\infty.$$

全く形式的に分母分子を微分して極限を取ると

$$\lim_{x \to +0}(a^x \log a + b^x \log b) = \log a + \log b < \infty$$

となり l'Hospital の法則は成立していないことになる！

(iii) [10] $a \le b$ とし $r = \frac{b}{a} \ge 1$ とおくと

$$(a^x + b^x)^{1/x} = a(1 + r^x)^{1/x}$$

となる。また

$$\lim_{x \to -\infty} r^x = \begin{cases} \infty, & r < 1, \\ 1, & r = 1, \\ 0, & r > 1 \end{cases}$$

となる。故に、$a \ge b$ の場合も考慮すれば

$$\lim_{x \to -\infty}(a^x + b^x)^{1/x} = \min\{a, b\}.$$

別解：対数をとって、$\lim_{x \to -\infty} \log(a^x + b^x) = \lim_{x \to -\infty}(x \log a + \log(1 + r^x)) = \pm\infty$ で $\log(a^x + b^x)/x$ が $x \to -\infty$ のとき $\frac{\pm\infty}{-\infty}$ の不定形であるから、l'Hospital の法則を適用する。分子分母を微分し、$r = \frac{b}{a}$ とおくと

$$\frac{(\log(a^x + b^x))'}{x'} = \frac{a^x \log a + b^x \log b}{a^x + b^x} = \frac{\log a + r^x \log b}{1 + r^x}$$

となる。$r>1$ のとき $\lim_{x\to-\infty} r^x = 0$ だから、これは $\log a$ に収束している。等々。

$\boxed{2}$ (1) $y=\sin(b\arcsin x)$ (b は定数) は

$$(1-x^2)y''-xy'+b^2y=0 \qquad (-1<x<1)$$

を満たす事を示せ.

(2) $y^{(n)}(0)$ $(n=1,2,\cdots)$ を求めよ.

[略解]：(1) [5] $(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ だから

$$y'=(b\arcsin x)'\cos(b\arcsin x)=\frac{b}{\sqrt{1-x^2}}\cos(b\arcsin x),$$

であり

$$\begin{aligned} y'' &= \frac{bx}{(1-x^2)^{3/2}}\cos(b\arcsin x)-\frac{b}{\sqrt{1-x^2}}\sin(b\arcsin x)\frac{a}{\sqrt{1-x^2}} \\ &= \frac{x}{1-x^2}y'-\frac{b^2}{1-x^2}y, \end{aligned}$$

となる。これより、所期の微分方程式が求まる。

(2) [10] (1) で得られた微分方程式を m 回微分（$D^m=(d/dt)^m$ を施して）

$$D^m((1-x^2)y'')-D^m(xy')+a^2D^my=0.$$

更に、Leibnitz の公式を用いると

$$\begin{aligned} &D^m((1-x^2)y'')=\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}(1-x^2)^{(k)}y^{(m-k+2)}=(1-x^2)y^{(m+2)}-2mxy^{(m+1)}-m(m-1)y^{(m)}, \\ &D^m(xy')=xy^{(m+1)}+my^{(m)}, \end{aligned}$$

即ち、

$$(1-x^2)y^{(m+2)}-(1+2m)xy^{(m+1)}+(b^2-m^2)y^{(m)}=0$$

となる。これより、$\lim_{x\to0}(1+2m)xy^{(m+1)}(x)=0$ ならば

$$y^{(m+2)}(0)=(m^2-b^2)y^{(m)}(0)$$

である。

$y(0)=0$, $\dot{y}(0)=b$ と上の関係式を用いて

$$(1-x^2)y^{(3)}-(1+2)xy^{(2)}+(b^2-1^2)y^{(1)}=0 \Longrightarrow y^{(3)}(0)=(1-b^2)b,$$

であり

$$y^{(m)}(0)=\begin{cases} 0, & m=0 \text{ と } 2 \text{ 以上の偶数}, \\ b, & m=1, \\ ((m-2)^2-b^2)((m-4)^2-b^2)\cdots(3^2-b^2)(1^2-b^2)b, & m=3 \text{ 以上の奇数} \end{cases}$$

が 想定される。これを数学的帰納法で証明する。実際、$m=0,1$ では成立するので、3 以上の奇数 m まで成立したとして、

$$\begin{aligned} &y^{(m+1)}(0)=((m-1)^2-b^2)y^{(m-1)}(0)=0, \\ &y^{(m+2)}(0)=(m^2-b^2)y^{(m)}(0)=(m^2-b^2)\cdots(3^2-b^2)(1-b^2)b. \end{aligned}$$

注意：$y^{(m)}(0)$ の形を推定しただけでは解答として不十分である。Leibnitz の公式は数学的帰納法で証明されるが、$y^{(m)}(0)$ に対する最終の結果も上のように数学的帰納法で示すべきで、これがないと減点した。

$\boxed{3}$ 関数 $f(x,y)=(x^2-y^2)e^{-(x^2+y^2)}$, $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, の極値点を求め、極大、極小を判定せよ。

[略解] [15]：関数 $f(x,y)$ の極値点の候補を探す。偏微分して

$$f_x(x,y)=[2(x-x^3)+2xy^2]e^{-x^2-y^2}=0,\quad f_y(x,y)=[-2(y-y^3)-2yx^2]e^{-x^2-y^2}=0$$

となる。これより、

$$(x-x^3)+xy^2=x(1-x^2+y^2)=0,\quad (y-y^3)+yx^2=y(1-y^2+x^2)=0$$

だから、極値点の候補は $(x,y)=(0,0),\ (\pm1,0),\ (0,\pm1)$ となる。それらの点での Hessian

$$\begin{aligned}\mathrm{Hess}f(x,y)&=\begin{pmatrix}f_{xx}(x,y)&f_{xy}(x,y)\\f_{yx}(x,y)&f_{yy}(x,y)\end{pmatrix}\\&=2e^{-x^2-y^2}\begin{pmatrix}1+y^2-2x^2y^2-5x^2+2x^4&2x^3y-2xy^3\\2x^3y-2xy^3&-1+5y^2-x^2+2x^2y^2-2y^4\end{pmatrix}\end{aligned}$$

を計算すると

$$\mathrm{Hess}f(0,0)=2\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix},$$

$$\mathrm{Hess}f(\pm1,0)=2e^{-1}\begin{pmatrix}-2&0\\0&-2\end{pmatrix},\quad \mathrm{Hess}f(0,\pm1)=2e^{-1}\begin{pmatrix}2&0\\0&2\end{pmatrix}.$$

故に、以下のようになる：(i) 点 $(0,0)$ は峠点で極値点ではない。
(ii) $\mathrm{Hess}f(0,\pm1)$ は正定値だから、点 $(0,\pm1)$ は極小点となる。
(iii) 点 $(\pm1,0)$ では $\mathrm{Hess}f(\pm1,0)$ は負定値だから、極大点となる。 □

注意：「峠点」の定義は講義中は詳しく述べなかったが、そこでのヘッセ行列は正定値でも負定値でもないと分かればそれでよい。講義録にはヘッセ行列の固有値を用いて峠点の意味を述べておいたので、後期線形代数で固有値を習ったら見直して欲しい。また、極値点の候補でヘッセ行列式が消えている状況になったら「この段階では極値かどうか判定できない」と表現するようにと述べておいた。

$\boxed{4}$ $f(x,y)=e^x\cos y$ を $1+x+\frac{1}{2}(x^2-y^2)$ で近似したときの誤差は、$(|x|+|y|)^3e^{|x|}/6$ で押さえられる事を示せ。

[略解] [10]：Taylor の定理を用いる。$f(x,y)$ を $(0,0)$ で 2 次まで展開し残りを剰余項とすると

$$f(x,y)=f(0,0)+(f_x(0,0)x+f_y(0,0)y)+(\frac{1}{2!}f_{xx}(0,0)x^2+f_{xy}(0,0)xy+\frac{1}{2!}f_{yy}(0,0)y^2)+R_3,$$

但し、$0<\theta<1$ として

$$R_3=\frac{1}{3!}f_{xxx}(\theta x,\theta y)x^3+\frac{1}{2!}f_{xxy}(\theta x,\theta y)x^2y+\frac{1}{2!}f_{xyy}(\theta x,\theta y)xy^2+\frac{1}{3!}f_{yyy}(\theta x,\theta y)y^3$$

となる。

この式を覚える必要はない[1]。試験中にも説明したように $g(t)=f(tx,ty)$ と書き換えて $g(t)$ を $t=0$ で展開すると、ある $0<\theta<1$ があって

$$g(t)=g(0)+g'(0)t+\frac{g''(0)}{2!}t^2+\frac{g'''(\theta t)}{3!}t^3$$

となる。ここで、

$$g(0)=f(0,0),\quad g(1)=f(x,y),$$
$$g'(t)=xf_x(tx,ty)+yf_y(tx,ty),\quad g'(0)=xf_x(0,0)+yf_y(0,0),$$

[1]元に戻って考えることの効用であり、そのことを認識できれば一歩前進

$$g''(t) = x[xf_{xx}(tx,ty) + yf_{yx}(tx,ty)] + y[xf_{xy}(tx,ty) + yf_{yy}(tx,ty)],$$
$$g''(0) = x^2 f_{xx}(0,0) + xy(f_{yx}(0,0) + f_{xy}(0,0)) + y^2 f_{yy}(0,0),$$
$$g'''(t) = x^2[xf_{xxx} + yf_{yxx}] + xy[xf_{xyx} + yf_{yyx}] + yx[xf_{xxy} + yf_{yxy}] + y^2[xf_{xyy} + yf_{yyy}]$$
$$= x^3 f_{xxx} + x^2y(f_{yxx} + f_{xyx} + f_{xxy}) + xy^2(f_{yyx} + f_{yxy} + f_{xyy}) + y^3 f_{yyy}$$

関数 f は何回でも偏微分でき、偏微分したものは連続であるから、高階偏微分係数は偏微分の順序によらない！($f_{yxx} = f_{xyx} = f_{xxy}$, etc.) 故に、

$$g'''(t) = x^3 f_{xxx}(tx,ty) + 3x^2 y f_{yxx}(tx,ty) + 3xy^2 f_{yyx}(tx,ty) + y^3 f_{yyy}(tx,ty)$$

となる。ここで $t = 1$ とすれば

$$3!R_3 = g'''(\theta) = x^3 f_{xxx}(\theta x, \theta y) + 3x^2 y f_{yxx}(\theta x, \theta y) + 3xy^2 f_{yyx}(\theta x, \theta y) + y^3 f_{yyy}(\theta x, \theta y).$$

ここで

$$f(0,0) = 1, \quad f_x(0,0) = 1, \quad f_y(0,0) = 0,$$
$$f_{xx}(0,0) = 1, \quad f_{xy}(0,0) = 0 = f_{yx}, \quad f_{yy}(0,0) = -1,$$
$$f_{xxx}(x,y) = e^x \cos y, \quad f_{xxy} = -e^x \sin y = f_{xyx}(x,y) = f_{yxx}(x,y),$$
$$f_{xyy}(x,y) = -e^x \cos y = f_{yxy}(x,y) = f_{yyx}(x,y), \quad f_{yyy}(x,y) = e^x \sin y$$

だから、

$$g(0) = 1,\ g'(0) = x,\ g''(0) = x^2 - y^2$$

で

$$f(x,y) = 1 + x + \frac{1}{2}(x^2 - y^2) + R_3$$

となる。これより

$$|f_{xxx}(\theta x, \theta y)| \le |e^{\theta x} \cos \theta y| \le e^{|x|}, \quad \text{etc},$$

で

$$|R_3| \le \frac{1}{6} e^{|x|}(|x|^3 + 3|x|^2|y| + 3|x||y|^2 + |y|^3). \qquad \square$$

================諸君の感想への感想================

感想の中で始めて「滑舌（かつぜつ）が悪い」という言葉に出会ったが、広辞苑には載っていないようだ。どこで言葉として仕入れてきたのだろうか？或いは自分達の発明した言葉なのだろうか？

要望のうちの一つ、黒板に書きながらしゃべると聞きとりにくいという意見が複数あった。書いてからしゃべると時間が余計にかかるし、書いている間、学生諸君には次に何が起こるか予測しにくいだろう。そこで、マイクを使うことは考えられるが、何故声が小さくて聞こえないと授業中に言わないのだろうか?字が小さくて見えないともいうが相当大きく書いているのだが、それなら前の席は空いているのに何故後ろの席に座っているのだろうか？黒板を手で消さず黒板消しでという要望もあったが、そんなにしょっちゅう手で消しているとは思えないのだが?「字が汚い」というのはなかなか直らないものであるが、すかさず質問するように。字が読みにくいかもしれないので、授業予定をホームページに載せ、授業中に質問などがあると、それに対する答を書いたものを授業内容として再度載せ直している。

君達の感想文を読むと、君達は「大学で何故数学の授業を受けているのか」と、あまり考えていないのではと感じる。今世の中は流動的で、ますます「大学で何を身に付けたか？」が問われるようになっている。

鷲田小弥太「大学時代に学ぶべきこと、学ばなくてよいこと」PHP 文庫

なども参考にしたらどうだろうか?「何故数学を学ぶか」についての私の立場は最初の講義で説明したので、できればもう一度読み返して欲しいものである。少なくとも君達が進学する分野でどのように数学が使われるかについては、ホームページで UBC[2]の「数学」の項をリンクしておいたので、是非見ておいて欲しい。何らの

[2]ホームページとして秀逸であるとの評価があったもの

問題意識無しで授業を聞いていて、授業の内容が良く分かる ([3]) などという人は、この大学のレベル以上であるから、もっと高級な大学を探して移籍すべきだろうし、そんな面倒なことをしなくても世界の一流大学の一流教官の講義録がインターネットで幾らでも手に入る。問題意識が無いならば、まず座って良く聞いて理解すべく努力を惜しんではならない。そのうち、だんだんと「ものが見えてくる」。

『復習を簡潔にし、前回の講義の続きをすれば講義進度にゆとりができる』のでは、という意見もあったが、1 週間に一度の講義で前の講義内容を覚えているのだとすると、さすがに素晴らしいメモリーを持っている。しかし、そうかな？その復習のときにこそ、質問がしやすいはずだが？

『[4]ことで講義の第一印象がよくなかった。講義の入りは大事だと感じた』とある。私にはそのような講義をした記憶は無いのだが、実数の性質として「四則演算」「大小関係」「連続性」を何度も述べたが、そのことなのだろうか？ピタゴラス学派は $\sqrt{2}$ を「悪魔の数」と認識していたようだが、それを普通のものとするために「実数」という概念が必要であり、この認識無しでは「数学的認識」の基礎がぐらつき、ひいては「物理も化学も生化学」も「数式を用いて理解している事柄」すべてが怪しくなってしまうのだが。数学は「量」についての事象を記述する「言語学＋証明付き論理学」なのだから、ここがぐらついては「永田町用語」になってしまう。ことによると「線形代数」の最初の講義で「数学全般」にショックを受けてしまったということなのだろうか？勿論、「代数」では「０の概念」の認識は極めて大切である！私は 40 年程前に線形空間での 0 ベクトルの意味が分からずそれゆえ試験で点数が悪く、それを友達に指摘されて「ハッ」としたことがある。

また答案用紙の感想文はそのまま打ち返してホームページに載せてあるが、君達の「勉強するとか、努力するとかいうのは、どの程度の事」なのだろうか？自分の経験から考えても、あれもこれもやるつもりというのと、現実の実績は大分差があるのが「普通の人々」である。最小限ここまではやっておこうという「勉強の優先順位」をどうつけるかが各自の才覚であろう[5]。そのとき、[6]でないといけないのだが、今回のように極めて甘い採点をするのは、大いに気になるところである[7]。これが、『他のクラスの微積のテストが、みんな満点ねらいでいくのに。こっちのクラスが平均 5/20 点だと将来を大きく左右する学科分けや単位にひびいてしまうので』という感想に対する答である。また、中間試験では「証明問題」を出し、高校数学との違いを強調し、[8]と思って貰うように配慮するのは「諸君の将来に期待する者として」当然であろう。

『ムリに背のびした問題を出さないでほしい』という感想には、他クラスの試験問題と比べてみたらどうだろうか？と応えたい。この程度の問題は「受講するならば」それなりに解けることが東工大生には期待されていると思って欲しい。今回の試験が「予想問題」からそのまま出ていることを見れば、果たして「ムリに背のびした問題」といえるのだろうか？そもそも君は「予想問題」を解いてみたのだろうか？

『教科書は全く使わなかったので、指定しない方がよい。「ツンドク」になるのでもったいない。自分に合ったものを自分で選ぶ方がよいと思う』という意見があった。一見もっともらしいが、教科書を指定しないとどれを選んで良いか分からない程沢山あるし、程度も色々だ。教科書と指定してあったら、買わなければならないというのも「思い込み」の一つだ[9]。また何故折角買った教科書を事前に読んでこないのだろうか[10]？教科書には Cauchy の平均値の定理を用いない l'Hospital の法則の証明が載っていたりするのだが、気がついただろうか？しかし、Rolle の定理、平均値の定理から Cauchy の平均値の定理への考え方の「拡張」は、物事を一般化して考えるという思考法の有効性を示してるし、これらの証明は一番直感が効く Rolle の定理に帰着させることが面白いと感じて欲しかったのだが！

---

[3]君達が中学校の数学の授業を聞けばこの状態になる!

[4]初回の講義で "０の概念" について時間を取ってしまった

[5]物事の優先順位を付けるというのが、トップの役割で、学生時代はそれを大した危険性無しに学ぶ良い時期である。ここでは「皆と同じ」という発想法が効かない！

[6]数学が優先順位最下位ならば、単位が取れなくても当然

[7]フランスでは子供を甘やかすことを「お菓子」の甘さの動詞形「ガテー」という

[8]入試合格でいつまでも気を緩めてもいられない

[9]「マンションを安く購入した」人々が、官公庁が建築を認可したのだから「大丈夫」だろうというのと同じ気分で、「指定された教科書」を買ったことになろうか？しかし、この教科書を眺めておくだけでも損はしないし、授業の程度が分かるのだが

[10]トルシエではダメ、それではジーコに、やっぱりダメか。それではオシムにすればうまくいく、という一般のファンやマスコミはともかく、選手は自分で自分を磨かねばならないし、日本が嫌だったら海外に出て活躍すれば良い！