微分積分学第一　6+7類V組 第13回講義内容（2006年7月25日）井上淳

採点ミス訂正：中間試験問2の採点について『「単調増加」をちゃんと言及したのに0点だった、解答例の別法と同じなはずだから、変だ』と感じた人は答案用紙をもってきて下さい！

大丈夫かな?: このように掲示し、講義でも注意を喚起したのだが、誰も何も言ってこない（この採点に関する疑義を申し出てくれた1名を除いて）。中間試験の答案の「点数」だけしか見ず、何故そのような結果なのかの原因究明はしないのだろうか。実は数学の点数等はどうでもよいということなのだろうか？答案返還する、或いは情報を開示する、に関し興味のない人々相手にしているという事なのだろうか？

嫌いだがやらなければならないとしたら、その結果については何故という原因究明の姿勢がないと、「パロマのガス湯沸かし器」「トヨタの“新”レクサス」の人々を産み出すのではないかと大いに心配である。

1　何故、$\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h}=1$ といえるのだろうか？

2　関数とは何か？

3　1変数関数の微分法

4　Taylorの定理とその応用（1変数の場合）

5　多変数関数の連続性、偏微分可能性、全微分可能性

5.1　多変数関数の導入、距離関数、etc

5.2　多変数関数の偏微分可能性、全微分可能性

5.2.1　連続性:多変数関数の極限についての注意

5.2.2　偏微分、方向微分と全微分

5.3　合成関数の微分

5.4　多変数のTaylorの定理と極大、極小

● **Taylorの定理（1変数の場合）：**

定理 5.1 I を $\mathbb{R}$ の開区間とし $f\in C^k(I)$ とすると、$a\in I,\, x\in I$ に対して

$$f(x)=\sum_{j=0}^{k-1}\frac{1}{j!}f^{(j)}(a)(x-a)^j+R_k,\quad R_k=\frac{1}{k!}f^{(j)}(a+\theta(x-a))(x-a)^k,\quad (\exists\theta\in(0,1)).$$

定義 5.1 $f \in C(I)$ が $x = c$ で極大になっているとは、ある $\delta > 0$ があって $(c - \delta, c + \delta) \subset I$ であり、

$$f(x) \le f(c), \quad \forall x \in (c - \delta, c + \delta)$$

となることである。このとき、$f(c)$ を極大値という。

注意：より詳しく、広義の極大とか、極小とかいう概念について、その名前の付け方から定義を類推せよ。また、点 $x = c$ が区間 I の境界にある場合は、どう定義したら良いか、各自考えよ。

命題 5.1 区間 I で定義された関数 $f \in C^2(I)$ が、区間内の点 c で

$$f'(c) = 0, \quad f''(c) < 0$$

となるならば、関数 f は $x = c$ で極大値をとる。

証明：関数 f を $x = c$ で 2 次まで展開すると、

$$f(x) = f(c) + f'(c)(x - c) + \frac{f''(c + \theta(x - c))}{2!}(x - c)^2 \quad (0 < \theta < 1)$$

となる。f'' が $x = c$ で連続で $f''(c) > 0$ だから x が c の近く ($\delta > 0$ があって $|x - c| \le \delta$) ならば $f''(x) > 0$ である。即ち、

$$\frac{f''(c + \theta(x - c))}{2!}(x - c)^2 > 0 \quad (|x - c| \le \delta). \tag{1}$$

$f'(c) = 0$ であることも用いると

$$f(x) \ge f(c) \quad (|x - c| \le \delta). \qquad \square$$

● 2 変数の Taylor の定理

講義では次のように考えた：$f(x, y)$ の (a, b) での挙動を、関数

$$g(t) = f(a + t(x - a), b + t(y - b)), \qquad g(0) = f(a, b), \quad g(1) = f(x, y)$$

を用いて調べる。$g(t)$ は 1 変数関数だから、それに Taylor の定理を用いて 2 回微分まで考えると

$$g(t) = g(0) + \dot{g}(0)t + \frac{\ddot{g}(\theta t)}{2!}t^2 \qquad 0 < \exists\theta < 1.$$

となる。故に、

$$g(1) - g(0) = f(x, y) - f(a, b) = \dot{g}(0) + \frac{\ddot{g}(\theta)}{2!}$$

となる。ここで、$x(t) = a + t(x - a)$、$y(t) = b + t(y - b)$ と書いて、合成関数の微分を実行してみる。

$$\dot{g}(t) = f_x(x(t), y(t))\dot{x}(t) + f_y(x(t), y(t))\dot{y}(t), \qquad \dot{g}(0) = f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b)$$

また

$$\begin{aligned}\ddot{g}(t) =& (f_{xx}(x(t), y(t))\dot{x}(t) + f_{yx}(x(t), y(t))\dot{y}(t))\dot{x}(t) + f_x(x(t), y(t))\ddot{x}(t) \\ &+ (f_{xy}(x(t), y(t))\dot{x}(t) + f_{yy}(x(t), y(t))\dot{y}(t))\dot{y}(t) + f_y(x(t), y(t))\ddot{y}(t)\end{aligned}$$

$\ddot{x}(t) = 0$、$\ddot{y}(t) = 0$ だから $0 < \exists\theta < 1$ があって

$$\begin{aligned}f(x, y) - f(a, b) =& f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b) \\ &+ \frac{1}{2}\big[f_{xx}(a + \theta(x - a), b + \theta(y - b))(x - a)^2 + f_{xy}(a + \theta(x - a), b + \theta(y - b))(y - b)(x - a)\big] \\ &+ \frac{1}{2}\big[f_{yx}(a + \theta(x - a), b + \theta(y - b))(x - a)(y - b) + f_{yy}(a + \theta(x - a), b + \theta(y - b))(y - b)^2\big].\end{aligned}$$

これから推測されるように、より一般的には以下のようになる：

定理 5.2 (Taylor の定理) 長方形領域 $I \times J$ 上で $f \in C^n(I \times J)$ とすると、

$$f(x,y) = \sum_{j+k=0}^{n-1} \frac{1}{j!k!} \frac{\partial^{j+k} f}{\partial x^j \partial y^k}(a,b)(x-a)^j(y-b)^k + R_n$$

となる。ここで

$$R_n = \sum_{j+k=n} \frac{1}{j!k!}(x-a)^j(y-b)^k \frac{\partial^{j+k} f}{\partial x^j \partial y^k}(a+\theta(x-a), b+\theta(y-b)), \quad (\exists \theta \in (0,1)).$$

● 極大値、極小値を求める一つの方法

命題 5.2 長方形領域 $I \times J$ で定義された関数 $f \in C^2(I \times J)$ が、領域の点 (a,b) で

$$f_x(a,b) = f_y(a,b) = 0, \quad \text{かつ} \quad H_f(a,b) = \begin{pmatrix} f_{xx}(a,b) & f_{yx}(a,b) \\ f_{xy}(a,b) & f_{yy}(a,b) \end{pmatrix} \quad \text{が負定値行列}$$

となるとする。すると、関数 f は $(x,y) = (a,b)$ で極大値をとる。

定義 5.2 長方形領域 $I \times J$ で定義された関数 $f \in C^1(I \times J)$ に対し、$f_x(a,b) = f_y(a,b) = 0$ となる点 (a,b) を関数 $f(x,y)$ の停留点 *(stationary point)* という。

定義 5.3 $n \times n$-行列 $A = (a_{ij})$ が負定値行列であるとは、任意の $\xi = {}^t(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \{(0,0,\cdots,0)\}$ に対して

$$\xi \cdot A\xi = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \Big(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\xi_j \Big) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\xi_i\xi_j < 0$$

となることである。

特に $A = \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix}$ が負定値行列となる必要十分条件は

$$a < 0,\ c^2 - ab < 0$$

である。実際、任意の $\xi = {}^t(\xi_1, \xi_2)$ に対して

$$\xi_1(a\xi_1 + c\xi_2) + \xi_2(c\xi_1 + b\xi_2) = a\xi_1^2 + 2c\xi_1\xi_2 + b\xi_2 < 0$$

となるための条件は、上に述べたものである。

命題 5.2 の証明: さて、$f_x(a,b) = 0,\ f_y(a,b) = 0$ だから

$$f(x,y) = f(a,b) + R_2,$$

$$\begin{aligned} R_2 &= \frac{1}{2}\big[f_{xx}(\cdots)(x-a)^2 + 2f_{xy}(\cdots)(x-a)(y-b) + f_{yy}(\cdots)(y-b)^2 \big] \\ &= \frac{1}{2}(x-a, y-b) \cdot H_f(\cdots) \begin{pmatrix} x-a \\ y-b \end{pmatrix}, \quad H_f(\cdots) = \begin{pmatrix} f_{xx}(\cdots) & f_{yx}(\cdots) \\ f_{xy}(\cdots) & f_{yy}(\cdots) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

但し、記法上 $(\cdots) = (a+\theta(x-a), b+\theta(y-b))$ とした。$f \in C^2(I \times J)$ であるから、$H_f(a,b)$ は負定値行列という仮定より、$(\cdots)$ が (a,b) の十分近くにあるとき $H_f(\cdots)$ も負定値行列。あとは、１変数の場合と同様の議論で、(x,y) が (a,b) の十分近くにあるとき

$$f(x,y) \le f(a,b) \quad \text{即ち、} f(x,y) \text{ は } (a,b) \text{ で極大.} \quad \square$$

注意：$H_f(a,b)$ が負定値でも正定値でもない場合、点 (a,b) が極値を与える点かどうか、一般的な判断はできない。関数の停留点であってそこで極値を与える点を**極値点**という。極値点以外の停留点は以下に説明する。

定義 5.4 一般に点 (a,b) は、二つのベクトル $(x_1,y_1)\,(x_2,y_2)\neq 0$ が存在して t に関する関数 $g(t)=f(a+tx_1,b+ty_1)$ が $t=0$ で極小、s に関する関数 $h(s)=f(a+sx_2,b+sy_2)$ が $s=0$ で極大となるとき、関数 $f(x,y)$ の**峠点**という。

例えば、関数 $f(x,y)=x^2-y^2$ に対する停留点 $(0,0)$ は、$f(x,0)=x^2$ が $x=0$ で極小値、$f(0,y)=-y^2$ が $y=0$ で極大値を持つので、峠点である。

$$\begin{pmatrix} f_{xx}(0,0) & f_{xy}(0,0) \\ f_{yx}(0,0) & f_{yy}(0,0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

より一般に、関数 $f(x,y)$ に対する停留点 (a,b), $f_x(a,b)=0$, $f_y(a,b)=0$, で

$$\begin{aligned} \det\begin{pmatrix} f_{xx}(a,b)-\lambda & f_{xy}(a,b) \\ f_{yx}(a,b) & f_{yy}(a,b)-\lambda \end{pmatrix} &= \det(H_f(a,b)-\lambda\mathbb{I}_2) \\ &= \lambda^2-(f_{xx}(a,b)+f_{yy}(a,b))\lambda+f_{xx}(a,b)f_{yy}(a,b)-f_{xy}(a,b)f_{yx}(a,b)=0 \end{aligned}$$

を満たす実根[1] λ_1,λ_2 の性質を調べる。これらは停留点 (a,b) での Hessian（ヘッセ行列）$H_f(a,b)$ に対応する固有値[2]になり、以下のように分類される。

(i) $\lambda_1>0$, $\lambda_2>0$ ならば停留点 (a,b) は極小点、

(ii) $\lambda_1<0$, $\lambda_2<0$ ならば停留点 (a,b) は極大点、

(iii) $\lambda_1>0$, $\lambda_2<0$ ならば停留点 (a,b) は峠点、

(iv) $\lambda_1\lambda_2=0$ ならばその停留点 (a,b) の近辺の関数の挙動はこの情報だけでは不明。

======================================

メモ：前回ホームページに掲載された「想定問題」のうち、どこを重点的に解いていくように示唆した。その後、演習で Hessian（ヘッセ行列）の行列式が０になるときの取扱いはなかなか伝わらないという報告があった。講義では峠点の取扱いは「Hessian（ヘッセ行列）の行列式が０になるときはこれだけでは、当該の点が極値かどうか判定できない」とした。とは言え、何故 $y=x^3$ の停留点 $x=0$ が極値にならず、$y=x^4$ の場合には極小値になるのかの説明をした。

[1]実数値解のこと。この式は虚根（虚数値解というのか？）を持たないことはすぐ分かる
[2]行列とその固有値については線形代数の講義で説明される