試験中の指示：
「解けなかった」と感じた人は、どこから分からなくなったかレポートをメールして下さい！締め切り 6 月一杯。(数式を扱うときは Tex や LaTex というソフトが便利)
（追記）メールするもしないも君達の勝手ですが、この操作は極めて大切で、分からないときのみならず何か困ったときに「どこからか、とか、何故か」を自分で探す訓練になります。これにより、なまじ分かったつもりの人や困らないつもりの人より「進歩の可能性を確保」できます。これができないと、碁や将棋でいう「勝手読み」、即ち、「自分の都合の良いようにしか物事を解釈しない」ということになり、ひいては、「敵を知り己を知れば百戦危うからず」とは逆の悲惨なことになりえますぞー。ところで、感想文とかは「講義に対する貢献」とみなします。

試験直後の印象：
問 1 は予告問題のためか質問は出なかったが、ツボを押さえた解答ができているかどうか、楽しみである。
問 2 は何やら手こずったようである。この問については Taylor の定理を用いることをヒントとして与えた。それよりも気にかかったことは、「問題文をちゃんと読む」ということが思いのほかできないようにみえることである。数学の一つの特徴は、言葉の「定義」をきちんとしてあるので「正確に伝わり易い」ということにある。それにもかかわらず、例えば、「上界」と「上限」の違いが分からずごちゃ混ぜに「覚えて」いると、さすがに問題文の意味が伝わりにくい。同じ日本語のように見えても、数学者の言葉と政治家の永田町言葉とは使い方が違うから、「数学という言語体系」は「普遍的かつ不変的」なのです。
問 3 には何の質問がなかったし、演習で似た問題をやっているので、できが良いことを期待している。

少し採点しての印象：
物事を論理的に考えそれを記述できることは「知識人としての基本」であるが、難しいことで、なかなか苦労しているようである。しかし苦労すれば必ず進歩するのだから、努力して欲しいものである。

========== 以下解答例 ==========

$\boxed{\mathbf{1}}$ 以下の式

$$\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h}=1$$

について論ぜよ（ヒント：大学に入って修得したであろう数学的考え方をもとに、これにはどう答えたらよいのか？何がツボ（肝要な点）であったか明示し答よ)。

略解例 [8 点]： 2005 年 5 月 2 日第 3 回講義内容に詳しく説明してありますから、もう一度読み直してみて下さい。
ツボ 1 [2 点]：e はどう定義したか?実数の連続性との関係を明確に書く。即ち、自然数 n に対して $e_n=(1+\frac{1}{n})^n$ と定義したものが、有理数の中で「上に有界な単調増加列」となっていること、「実数の連続性」より、極限 $\lim_{n\to\infty}e_n$ が実数の中で存在し、それを e と記した。
ツボ 2 [2 点]：冪乗の定義をどうするか？一般に指数関数の定義はどうしたか？単調な連続増加関数の逆関数は存在し連続であることを注意する。ツボ 1 で定めた数 e は $e>1$ であること、一般に $a>1$ に対して指数関数 a^x がどう定義されるか？まず、自然数 n に対し a^n が帰納的に定義される。有理数 $x=q/p$ に対しては $y>1$ で単調増加連続な関数 y^p は $\xi^p=a^q$ なる $\xi>1$ を唯一つ持つから、それを $\xi=a^{q/p}$ として定義したこと、これが指数法則を満たすことを示した。次に一般の x に対しては x を有理数で近似することで a^x を定義し、更に連続であることを示した。
ツボ 3 [4 点]：まずツボ 1 での e の定義から、任意の $x>1$ に対して自然数 n を $n\le x<n+1$ と取ることに

よって
$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$$
を示す。

実際、冪乗の定義より
$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n < \left(1+\frac{1}{x}\right)^x < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$$
と
$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n = \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{-1} \to e,$$
$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\left(1+\frac{1}{n}\right) \to e,$$
を用いれば良い。$x<-1$ の場合も同様の考察をすれば良いのだが、合点いったかな？

$|h|\to 0$ のとき $1/|h|\to\infty$ だから、上の式を
$$\lim_{h\to 0}(1+h)^{1/h} = e$$
と書き換える。ここで、ツボ２で注意した指数関数の逆関数である対数関数の連続性を用いる。$(1+h)^{1/h}$ の対数をとり、
$$\frac{1}{h}\log(1+h) = \log(1+h)^{1/h} \to \log e = 1$$
となる。次に $u=e^h-1$ とおくと $h=\log(1+u)$ であり、$h\to 0$ のとき $u\to 0$ であるから
$$\frac{e^h-1}{h} = \frac{u}{\log u} \to 1. \qquad \square$$

注意：ツボ２の考察を除いて、いきなり $(1+\frac{1}{x})^x$ を定義するという答があった。$n\le x<n+1$ と取ることによって
$$1+\frac{1}{n+1} < 1+\frac{1}{x} \quad \text{であり} \quad \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n < \left(1+\frac{1}{x}\right)^n < \left(1+\frac{1}{x}\right)^x$$
となるところにツボ２の考察が用いられている。また $h=1/n$ として
$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \lim_{h\to 0}(1+h)^{1/h} = e$$
となる。だから $\lim_{h\to 0}\log(1+h)^{1/h}=1$ という解答も多かったが、任意の h に対してそれが０に収束するというのと、特殊な $h=1/n$ に対してというのでは一般的には隔たりがある！

また、対数関数の微分を考えるというのもあったが、この問題でその事実を使うと、同義語反復に近いと判断した。

注意：$f(h)=e^h-1,\ g(h)=h$ とおき、 $g'(h)=1\neq 0$ であることに注意して l'Hospital の法則より
$$\lim_{h\to 0}\frac{f(h)}{g(h)} = \lim_{h\to 0}\frac{f'(h)}{g'(h)} = \lim_{h\to 0}\frac{e^h}{1} = 1$$
となるという答があった。計算の方針は頷けるが、この問題は関数 e^x が定義より $x=0$ で微分可能でその微分係数が１となることを 定義に戻って示せ といっているのである。これでは問題の答を問題の解法に使っていると判断されるのでは？

==================

$\boxed{\mathbf{2}}$ 実係数 n 次多項式 $p(x)$ 及びその導関数 $p'(x), p''(x), \cdots, p^{(n)}(x)$ のすべてを正とするような x の値は、方程式 $p(x)=0$ の正根の上界である事を示せ（実係数方程式が一つの正数 M より大きな正の実数解を持たないとき、M を正根の上界という）。

解答例 [7 点]：いま M を $p(x)$ 及びその導関数 $p'(x), p''(x), \cdots, p^{(n)}(x)$ のすべてを正とするような x の一つとする。$x=M$ で $p(x)$ を Taylor 展開する。$m \geq n+1$ ならば任意の x に対して $p^{(m)}(x)=0$ となるから、

$$p(M+y) = p(M) + yp'(M) + \frac{1}{2!}y^2p''(M) + \cdots + \frac{1}{n!}y^np^{(n)}(M)$$

が分かる。実係数 n 次多項式 $p(x)$ に対する $x=M$ での仮定より、$y>0$ ならば $p(M+y)>0$ となり、$p(x)=0$ となる根は $x \geq M$ には無い。□

別解例：実係数 n 次多項式 $p(x)$ を $p(x)=ax^n+\cdots$ と書き、上の証明と同じ M をとる。$p^{(n)}(x)=an!$ であり、仮定より $p^{(n)}(M)>0$ だから $a>0$ となる。$p^{(n-1)}(M)>0$ かつ $p^{(n)}(x)>0$ だから、$x \geq M$ で $p^{(n-1)}(x)>0$ となる。以下同様の推論で $x \geq M$ で $p^{(k)}(x)>0,\ k=n-2,\cdots,0$ となる。即ち、$x \geq M$ で $p(x)>0$ となり、$p(x)=0$ となる根は $x \geq M$ には無い。□

注意：Taylor の定理を用いるとき、考えている $p(x)$ が実係数 n 次多項式だから『$m \geq n+1$ ならば任意の x に対して $p^{(m)}(x)=0$ となる』ということを明言できない答案も多かった。

==================

$\boxed{\mathbf{3}}$ 次の関数の定義域と導関数を求めよ。

$$f(x) = \arcsin\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$$

解答例 [5 点]：$\sin f(x) = g(x) \in [-1,1]$、 $g(x)=\frac{1-x}{1+x}$ で $1+x \neq 0$ だから

$$-1 \leq g(x) = \frac{1-x}{1+x}\cdot\frac{1+x}{1+x} = \frac{1-x^2}{(1+x)^2} \leq 1 \Longrightarrow -2(1+x) \leq 0,\ 0 \leq 2x(x+1).$$

故に、f の定義域は $x \geq 0$ である。合成関数の微分則から

$$\cos f(x)\cdot f'(x) = g'(x) = \frac{-2}{(1+x)^2}, \quad f'(x) = \frac{-2}{(1+x)^2\cos f(x)}$$

であり

$$\cos f(x) = \pm\left(1-\sin^2 f(x)\right)^{1/2} = \pm\frac{2\sqrt{x}}{1+x}$$

となる。$f(x) \in [-\pi/2, \pi/2]$ だから $\cos f(x) \geq 0$ である。故に、

$$f'(x) = \frac{-1}{(1+x)\sqrt{x}}. \qquad \square$$