微分積分学第一　6+7類V組 第7回講義内容（2006年6月06日）井上淳

中間試験予定：6月13日（火）1　2時限 W531、出題予告付き
期末試験予定：8月2日（水）5　8時限 H101

講義後の質問：以下のような質問があったが、講義中に一声あればスッキリするのだが？

(1) $\binom{n}{k}$ とは何か？

(2) $D(f)$, $R(g)$ とは何か？

(3) Taylor の定理の証明はこれで終わったのか？

これらについて以下に説明を加えた。$\binom{n}{k}$ は何かベクトルと思っていたとのことだが、それでは関数の積の高階微分に関する Leibnitz の公式の意味が分からなくなる。講義中、分からない、前に出てきたような気がするが忘れた等、その記号は何ですかとか、もう一度説明して下さいとか、是非とも声をかけて欲しい。Leibnitz の公式を書き上げるとき「二項定理と同様に」とは講義中に言っているのだが、黒板を写すことに熱中していて「聞こえていない」のだろう。大概の質問は、他の人々にとっても疑問点の事が多いのです。

1　何故、$\lim_{h\to 0}\dfrac{e^h-1}{h}=1$ といえるのだろうか？

2　関数とは何か？

3　1変数関数の微分法

3.1　微分商、微分可能性

3.2　平均値の定理、Cauchy の平均値の定理

3.3　不定形の極限、l'Hospital の法則

3.4　合成関数の微分

Landau の記号： ある点の近くでの2つの連続関数[1]の比の絶対値の挙動を調べ、「0に行くか、∞ に行くか、有界であるか」と区別できる場合を考える。即ち、$g(x)$ が x_0 の近くで0でないと仮定して

$$\lim_{x\to x_0}\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right|\begin{cases}=0\\=\infty\\\le M\end{cases}\iff\begin{cases}f=o(g)\\g=o(f)\\f=O(g)\end{cases}$$

と記す。

例2：$f=o(1)\ (x\to a)\iff f(x)\to 0\ (x\to a)$.
$f=O(1)\,(x\to a)\iff f(x)$ は「a の近く」で有界.

[1] その「ある点」では定義されていなくとも構わない

定理 3.1 関数 $z = f(y)$ の定義域を $D(f)$=*domain of* f とし、関数 $y = g(x)$ の値域 $R(g)$=*range of* g は $D(f)$ に含まれるとする。g は ξ で連続、f は $\eta = g(\xi)$ で連続とするとき、合成関数 $f \circ g(x) = f(g(x))$ は $x = \xi$ で連続である。

定理 3.2 関数 $z = f(y)$ の定義域を $D(f)$ とし、関数 $y = g(x)$ の値域 $R(g)$ は $D(f)$ に含まれるとする。g は ξ で微分可能、f は $\eta = g(\xi)$ で微分可能とするとき、合成関数 $f \circ g(x) = f(g(x))$ は $x = \xi$ で微分可能であり、ξ における微分係数は次式で与えられる。

$$(f \circ g)'(\xi) = f'(\eta) g'(\xi) \Big|_{\eta = g(\xi)}, \quad \text{即ち} \quad \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}.$$

注意：ここで $f'(\eta)\Big|_{\eta = g(\xi)}$ とは η に $g(\xi)$ を代入するという意味である。

定理 3.3 (逆関数の連続性と微分可能性) 関数 $y = f(x)$ は ξ を含む或る区間 $[a, b]$ で狭義単調かつ連続とする。f の値域は $[f(a), f(b)]$ であり逆関数 f^{-1} は $[f(a), f(b)]$ 上の連続関数である。また、f が $x = \xi$ で微分可能で、 $f'(\xi) \neq 0$ ならば、 f の逆関数 f^{-1} は $\eta = f(\xi)$ で微分可能で

$$(f^{-1})'(\eta) = \frac{1}{f'(\xi)}\Big|_{\xi = f^{-1}(\eta)}, \quad \text{即ち} \quad \frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}.$$

証明: (i) 任意の $\eta(f(a) < \eta < f(b))$ に対し中間値の定理より $f(\xi) = \eta$ となる $\xi(a < \xi < b)$ が存在し、それを $\xi = f^{-1}(\eta)$ と書いた。f の値域は $[f(a), f(b)]$ だから、f^{-1} の定義域は $[f(a), f(b)]$ となる。

(ii) 逆関数 f^{-1} の狭義単調増加性：$f(a) \leq \eta_1 < \eta_2 \leq f(b)$ をとり $\xi_1 = f^{-1}(\eta_1), \xi_2 = f^{-1}(\eta_2)$ とおく。もし $\xi_1 \geq \xi_2$ とすると f の狭義単調性 $\eta_1 = f(\xi_1) \geq f(\xi_2) = \eta_2$ となり $\eta_1 < \eta_2$ に矛盾する。故に、$\eta_1 < \eta_2$ ならば $f^{-1}(\eta_1) < f^{-1}(\eta_2)$ となる。

(iii) 逆関数 f^{-1} の連続性：定義域 $[f(a), f(b)]$ の点 η をとり η に収束する任意の狭義単調列 $\{y_k\}$ をとる。$x_k = f^{-1}(y_k)$ とおくと $a \leq x_k \leq b$ であり、f^{-1} が狭義単調だから $\{x_k\}$ も有界で狭義単調列になる。実数の連続性から x_k はある実数 ξ に収束する。f が連続だから、$f(x_k) \to f(\xi)$ であり、x_k は $\xi = f^{-1}(\eta)$ に収束する。即ち、$y_k \to \eta$ のとき $f^{-1}(y_k) \to f^{-1}(\eta)$ となる。

(iv) 逆関数 f^{-1} の微分可能性：十分小さな h をとり $k = f^{-1}(\eta + h) - f^{-1}(\eta)$ とおくと、上で述べたことより $h \to 0$ と $k \to 0$ とは同等なることが分かる。$\xi = f^{-1}(\eta)$ とし関係式 $\xi + k = f^{-1}(\eta + h)$ を f で写すと $f(\xi + k) = f(\xi) + h$ となるから

$$\lim_{h \to 0} \frac{f^{-1}(\eta + h) - f^{-1}(\eta)}{h} = \lim_{k \to 0} \frac{k}{f(\xi + k) - f(\xi)} = \frac{1}{f'(\xi)}. \qquad \square$$

（注意）この最後の式は $f(f^{-1}(x)) = x$ なる関係式を合成関数の微分公式を用いて微分すれば従う。

$$f'(f^{-1}(x)) \frac{df^{-1}(x)}{dx} = 1, \quad \frac{df^{-1}(x)}{dx} = \frac{1}{f'(y)}\Big|_{y = f^{-1}(x)}. \quad \text{即ち} \quad \frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}.$$

注意：この $dx/dy = 1/(dy/dx)$ なる記法は誤解を招くことがある。２変数以上の関数の偏微分がかかわるとき、**この記法の真似はしてはならない！**

対数微分　：$f(x) = g(x)^{h(x)}$ の $x \to a$ での挙動を $g(x)$, $h(x)$ の $x \to a$ での挙動と関連付けて調べる一つの方法である。

$f(x) = x^x$ を例にとり $\lim_{x \to 0} f(x) = 1$ を示した。事の序でに、任意の $\alpha > 0$ に対し $\lim_{x \to 0} x^\alpha \log x = 0$ となることを、L'Hospital の法則を用いて示した。

3.5　高階導関数

関数 $f(x)$ が $x=a$ で微分可能なとき、その微分係数を $f'(a)$ と書いた。もし、関数 f が区間 I のすべての点 x で微分可能とすると、区間 I の各点 x にそこでの微分係数 $f'(x)$ を対応させる関数が定義されたことになり、それも $f'(x)$ と書く。もし、この関数が区間 I で微分可能なとき、その微分係数を $f''(x)$, $f^{(2)}(x)$ と書き、f の 2 階微分という。以下、この操作を繰り返せるときは繰り返して、高階の微分 $f^{(k)}(x)$ が定まる。$f^{(k)}(x)$ が存在するとき、$f^{(k)}(x)$ は連続かどうか分からないが、$f^{(k-1)}(x)$ は連続である。区間 I が開区間のときはこのままでよいが、閉区間のときは、端点では右微分とか左微分という言葉を用いる必要があろう。

Leibnitz の公式：関数の積の微分について、f, g が何回でも微分可能ならば

$$(fg)' = f'g + fg', \quad (fg)'' = f''g + 2f'g' + fg''$$

はすぐに示せる。より一般に以下の公式は数学的帰納法で証明できる。

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k)} g^{(k)}, \quad \binom{n}{k} = {}_nC_k = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

この公式を用いて、$f(x) = \arcsin x$ の n 階導関数の 0 での値 $f^{(n)}(0)$ を求めよう（以下は講義では説明できなかったが、見ておいて欲しいものである）。

$\sin f(x) = x$ だから

$$f'(x) = \frac{1}{\cos f(x)} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 f(x)}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-1/2}$$

となる。故に 2 乗して $(f'(x))^2(1-x^2) = 1$ となるから、これを微分して

$$(1-x^2)2f'f'' - 2xf'^2 = 0.$$

f' は 0 にならないので $2f'$ で割って

$$(1-x^2)f'' - xf' = 0$$

が求まる。この式に Leibnitz の公式を適用すると

$$\left\{(1-x^2)f^{(n+2)}(x) + \binom{n}{1}(-2x)f^{(n+1)}(x) + \binom{n}{2}(-2)f^{(n)}(x)\right\} - \left\{xf^{(n+1)}(x) + \binom{n}{1}1\cdot f^{(n)}(x)\right\} = 0.$$

整理して

$$(1-x^2)f^{(n+2)}(x) - (2n+1)xf^{(n+1)}(x) - n^2 f^{(n)}(x) = 0$$

となる。$x=0$ を代入して

$$f^{(n+2)}(0) = n^2 f^{(n)}(0) \quad (n = 0, 1, \cdots).$$

一方

$$f(0) = \arcsin\ 0 = 0, \quad f'(0) = (1-x^2)^{-1/2}\big|_{x=0} = 1$$

だから、

$$f^{(n)}(0) = \begin{cases} 0 & n \text{ が偶数のとき}, \\ (n-2)^2(n-4)^2\cdots 3^2\cdot 1^2\cdot 1 = ((n-2)!!)^2 & n \text{ が奇数のとき}. \end{cases}$$

定義 3.1 区間 (a,b) 上の関数 $f(x)$ が C^k 級であるとは、$f(x)$ の k 階微分 $f^{(k)}(x)$ が存在して区間 (a,b) で連続であることとする。それを、$f \in C^k(a,b)$ と書く。

4　Taylor の定理とその応用（１変数の場合）

4.1　１変数 Taylor の定理

定理 4.1 (Taylor の定理) 区間 I 上で $f \in C^n(I)$ とすると、

$$f(x) = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{j!} f^{(j)}(a)(x-a)^j + R_n$$

となる。ここで

$$R_n = \begin{cases} \dfrac{1}{n!}(x-a)^n f^{(n)}(a+\theta(x-a)), & (\exists\theta \in (0,1)), \\ \dfrac{(1-\theta')^{n-1}}{(n-1)!}(x-a)^n f^{(n)}(a+\theta'(x-a)), & (\exists\theta' \in (0,1)), \end{cases}$$

等と表現される。

注意：上の定理では R_n の 2 つの表現を記した。後に述べる Taylor 展開、即ち $\lim_{n\to\infty} R_n = 0$ を示すとき、各種の剰余項の表示をうまく使い分けることが必要になる。

証明：講義中に、この定理の証明は Rolle の定理に帰着させることであると言明し、概略を述べたつもりであったが、帰り際に「この定理は証明したのですか」という質問があった。ここに述べる。

関数 $g(x)$ を

$$g(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(b-x)^k}{k!} f^{(k)}(x) + A(b-x)^n$$

とし、 Rolle の定理を適用できるように A を定める[2]：

$$g(a) = f(a) = g(b) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + A(b-a)^n$$

即ち、

$$A = \frac{1}{(b-a)^n}\left(f(a) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a)\right)$$

と定める。これより Rolle の定理を用いて、$a < c < b$ があって $g'(c) = 0$ となる。一方、

$$g(x) = f(x) + \frac{b-x}{1!} f'(x) + \frac{(b-x)^2}{2!} f''(x) + \cdots + \frac{(b-x)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(x) + A(b-x)^n$$

だから、微分して

$$\begin{aligned} g'(x) &= f'(x) + \left(-f'(x) + \frac{b-x}{1!} f''(x)\right) + \left(-\frac{b-x}{1!} f''(x) + \frac{(b-x)^2}{2!} f'''(x)\right) \\ &\quad + \cdots + \left(-\frac{(b-x)^{n-2}}{(n-2)!} f^{(n-1)}(x) + \frac{(b-x)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(x)\right) - nA(b-x)^{n-1} \\ &= \frac{(b-x)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(x) - nA(b-x)^{n-1} \end{aligned}$$

となる。故に、

$$0 = g'(c) = \frac{(b-c)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(c) - nA(b-c)^{n-1}, \quad f^{(n)}(c) = n!A.$$

即ち、

$$\frac{f^{(n)}(c)}{n!}(b-a)^n = f(a) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a). \qquad \square$$

[2] 2002 年度には「Taylor さんはどう考えてこの定理を見つけたのですか？凄いですね」という質問があった

注意：Taylor の定理において

$$R_n = f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(x-\xi)^k}{k!} f^{(k)}(\xi)$$

とおくと、上の定理では

$$R_n = \frac{(x-\xi)^n}{n!} f^{(n)}(\xi + \theta^{\{n\}}(x-\xi)) \quad (0 < \theta^{\{n\}} < 1)$$

なるものが現われたがこれを Lagrange の剰余という。ここで、数 $\theta^{\{n\}}$ は f にも x,ξ にも依っているが、それらへの依存を明示しなかった。この記号は単に、$\theta^{\{n\}}$ と $\theta^{\{1\}}$ を区別するためのものである。Cauchy の剰余という次の表現もある：

$$R_n = \frac{(1-\theta^{\{1\}})^{n-1}(x-\xi)^n}{(n-1)!} f^{(n)}(\xi + \theta^{\{1\}}(x-\xi)) \quad (0 < \theta^{\{1\}} < 1).$$

Lagrange の剰余は

$$g(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(b-x)^k}{k!} f^{(k)}(x) + A^{\{n\}}(b-x)^n$$

とし、この関数 $g(x)$ が $g(b) = g(a)$ を満たすように $A^{\{n\}}$ を定め、これに Rolle の定理を適用して求まる。一方、Cauchy の剰余は

$$g(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(b-x)^k}{k!} f^{(k)}(x) + A^{\{1\}}(b-x)$$

とし同様の操作で求まる。

これから直ちに、読者は

$$g(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(b-x)^k}{k!} f^{(k)}(x) + A^{\{\ell\}}(b-x)^\ell \quad (\ell = 1, 2, \cdots, n)$$

とし同様の操作で何が得られるか興味を持って、さっきまで重かった鉛筆も急に軽くなって紙の上を走り出してはいないだろうか？この異なる表現が必要な例は、次回の講義のとき述べる Taylor 展開の計算で与えられる。

4.1.1　極大値、極小値を求める一つの方法

定義 4.1 $f \in C(I)$ が $x = c$ で極大になっているとは、ある $\delta > 0$ があって

$$f(x) \le f(c), \quad \forall x \in (c-\delta, c+\delta) \cap I$$

となることである。このとき、$f(c)$ を極大値という。

注意：より詳しく、広義の極大とか、極小とかいう概念について、その名前の付け方から定義を類推せよ。

命題 4.1 区間 I で定義された関数 $f \in C^2(I)$ が、区間内の点 c で

$$f'(c) = 0, \quad f''(c) < 0$$

となるならば、関数 f は $x = c$ で極大値をとる。

証明：概略を説明した。

======================================

メモ：授業開始時受講者 50 名、最後の頃 80 名程度か？