

2006年度1学期数学演習V No.8

(微分積分 5/29 配布、6/5 提出分)

43 次の極限值を求めよ。

(1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{e^{3x} - 1}$

(2) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left\{ \left(\frac{1}{2}\right)^x + \left(\frac{1}{3}\right)^x + \left(\frac{1}{4}\right)^x \right\}^{\frac{1}{x}}$

44 $\tan^{-1} \frac{1}{3} + \tan^{-1} \frac{1}{5} + \tan^{-1} \frac{1}{7} + \tan^{-1} \frac{1}{x} = \frac{\pi}{4}$ をみたす実数 x を求めよ。

45 $I = [0, 1]$ 上の連続関数 $f(x)$ が、 $f(0) = 2$, $f(1) = \frac{1}{2}$ をみたすとき、 $f(\xi^2) = f(\xi)^2$ を満たすような実数 $\xi \in (0, 1)$ が存在することを、p.19 定理 2-1 (中間値の定理) を用いて証明せよ。(Hint: $f(0^2) < f(0)^2$, $f(1^2) > f(1)^2$.)

46 実数 x の小数部分とは、 $x - [x]$ のこととする。例: 3.14 の小数部分は 0.14

$(2 + \sqrt{3})^n$ の小数部分を a_n とする ($n = 1, 2, 3, \dots$)。数列 a_n はある数に収束する。その数を予想せよ。(計算機を使用してよい。証明ができればそれも書くこと。)

47 数列 $\{a_n\}$ が a に収束することを、『任意の $\epsilon > 0$ に対し、ある自然数 N があって、『 $n > N$ を満たすすべての自然数 n に対して $|a_n - a| < \epsilon$ 』となること』と定義する。

(1) 上の定義中の文字を使って次の文の空欄を埋めよ: 数列 $\{a_n\}$ が a に収束しないとは、ある $\boxed{\text{ア}} > 0$ があって、『任意の自然数 $\boxed{\text{イ}}$ に対して『 $\boxed{\text{ウ}} > \boxed{\text{イ}}$ かつ $|a_n - a| \geq \boxed{\text{ア}}$ 』となる自然数 $\boxed{\text{ウ}}$ がとれる』ということである。

以下、数列 $a_n = \sin n$ について考える。

(2) 任意の N に対してそれよりも大きい n で、 $\sin n > \frac{1}{2}$ をみたすものが存在することを示せ。

(3) $a \leq 0$ とする。(1), (2) を用いて $\sin n$ が a に収束しないことを示せ。

(ヒント: ϵ をたとえば $\frac{1}{2}$ として、(1) の『 』内を証明すればよい。)

(4) $a_n = \sin n$ はどんな実数 a にも収束しないことを示せ。

(ヒント: (3) で $a \leq 0$ の場合は示されているので、あと $a > 0$ に収束しないことを同様に示せばよい。)

48 関数 $f(x)$ ($x \in I$) の値域とは、実数の集合 $\{f(x) \mid x \in I\}$ のことであった。

(1) $(-\infty, \infty)$ 上の連続関数 $f(x)$ で、値域が $(-1, 1)$ になるものを一つあげよ。

(2) $[-1, 1]$ 上の関数 $f(x)$ で、値域が $(-1, 1)$ になるものを一つあげよ。

(3) $[-1, 1]$ 上の連続関数 $f(x)$ で、値域が $(-1, 1)$ になるものはあるか?